

Übungsblatt 11

31.05.2022

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösung mit der kleinsten Norm der unterbestimmten Gleichungssysteme:

$$(a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y - 2z = 6 \end{cases}$$

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Orthogonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie anschließend die inverse Matrix A^{-1} . Dies ist mit den speziellen Eigenschaften von A einfach. Was kann man außerdem über den Wert von $\det(A)$ sagen?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung, deren Abbildungsmatrix orthogonal ist, den Winkel zwischen Vektoren unverändert lässt. Zeigen Sie zunächst am Beispiel

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = Ax,$$

dass gilt:

$$\angle(x, y) = \angle(Ax, Ay)$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der Orthogonalmatrizen eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bildet.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Die Punkte $A(6/0/0)$, $B(2/1/3)$ und $C(-2/-2/2)$ liegen in einer Ebene E .

- Stellen Sie die Hessesche Normalform der Ebene auf. Wie groß ist der Abstand der Ebene zum Ursprung?
- Welcher Punkt in der Ebene hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? Stellen Sie dazu das zugehörige unterbestimmte LGS auf und finden Sie die Lösung mit Hilfe der verallgemeinerten Inverse.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist und bestimmen Sie ihre Inverse.

Aufgabe 7

Die Abbildung f_A dreht einen Vektor im \mathbb{R}^3 innerhalb der x - z -Ebene um einen Winkel ϕ . Die Abbildung f_B spiegelt einen Vektor im \mathbb{R}^3 an der x -Achse.

- Stellen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen A und B auf.
- Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der hintereinander geschalteten Abbildungen $f_B \circ f_A$ auf.
- Bestimmen Sie auch die zugehörige Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung $(f_B \circ f_A)^{-1}$.

Aufgabe 8

- Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2 \frac{uu^\top}{u^\top u}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

Hinweis: Berechnen Sie nicht die Komponenten von H_n .

- Verifizieren Sie das Ergebnis für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.