Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2022

Matthias Grajewski, Ruth Schöbel, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 4 — 12.04.2022

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixprodukte $AB, BA, A^\top B, B^\top A, A^\top A, AA^\top$, falls sie existieren. Welche der Matrixprodukte existieren auf jeden Fall, unabhängig von der Zeilen- und Spaltenzahl von A? Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

wobei i die imaginäre Einheit ist. Stellen Sie eine Behauptung für A^n auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 3

Es sei A eine 2×2-Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie dazu zwei Rechenwege:

(a) Überprüfen Sie, dass das Produkt von A und A^{-1} die Einheitsmatrix gibt.

(b) Berechnen Sie die Inverse von A nach dem Gauß-Verfahren.

Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils die Inverse folgender Matrizen, falls diese existiert:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Matrixprodukte sind wohldefiniert?

(a) $A \cdot B$ (b) $C \cdot B$ (c) $A \cdot C$ (d) $A \cdot B \cdot C$
(e) $A \cdot C \cdot B$ (f) $C \cdot B \cdot A$

Begründen Sie Ihre Aussagen und bestimmen Sie gegebenenfalls das Produkt der Matrizen.

Aufgabe 6

Es sind folgende Abbildungsmatrizen gegeben:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Matrix A_ϕ wird ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel ϕ gedreht, die Matrix B spiegelt selbigen an der x-Achse.

(a) Veranschaulichen Sie die Behauptungen am Beispiel des Vektors $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$, wobei $A = A_{\frac{\pi}{2}}$, indem Sie den Vektor selber und dessen Abbildungen $f_A(x_0) = A \cdot x_0$ und $f_B(x_0) = B \cdot x_0$ in ein Koordinatensystem einzeichnen.

(b) Zeichnen Sie auch die hintereinander geschalteten Abbildungen $f_{AB}(x_0) = A \cdot B \cdot x_0$ und $f_{BA}(x_0) = B \cdot A \cdot x_0$ von x_0.

(c) Wie sehen die Umkehrabbildungen zu $f_A(x)$ und $f_B(x)$ aus? Stellen Sie dazu die Abbildungsmatrizen A^{-1} und B^{-1} auf.

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen zu den Umkehrabbildungen f_{AB}^{-1} und f_{BA}^{-1}.

(e) Verifizieren Sie die Ergebnisse aus b) und d), indem Sie die Vektoren $f_{AB}(x_0)$ und $f_{BA}(x_0)$, die Sie zeichnerisch bei b) erhalten haben mit den Matrizen aus d) multiplizieren.

Aufgabe 7

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Inverse zu folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Die Spur einer quadratischen Matrix $M = (m_{ij})$ ist definiert durch

$$\text{Spur}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung darstellt.

(b) Sei $\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\widehat{B} = \widehat{A}^\top$.

   (i) Verifizieren Sie $\text{Spur}(\widehat{A}\widehat{B}) = \text{Spur}(\widehat{B}\widehat{A})$.

   (ii) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

   (iii) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(A^\top A) = 0$ genau dann, wenn $A = (0)$.

   (iv) Man zeige weiter: $\text{Spur}(ABC) = \text{Spur}(BCA)$, aber i.a. $\text{Spur}(ABC) \neq \text{Spur}(BAC)$.