

## Übungsblatt 2

29.03.2022

### Selbstlernaufgaben

#### Aufgabe 1

Ein lineare Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei definiert durch

$$f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  ein Isomorphismus ist.
- (b) Bestimmen Sie  $f^{-1}(x, y, z)$ .

#### Aufgabe 2

Es sei  $P^n$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq n$  und

$$f : \begin{cases} P^n \rightarrow P^{n-1} & : n \in \mathbb{N} \\ P^0 \rightarrow P^0 & : n = 0, \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  für die Differentiation  $f(p) = p'$  eine lineare Abbildung ist.
- (b) Untersuchen Sie die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität.
- (c) Wie sieht das Bild und der Kern dieser Abbildung aus?

#### Aufgabe 3

Es sei  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die lineare Abbildung, die durch

$$T(x, y, z) = (-x + 2y + z, x + y, -2x + y + z)$$

definiert ist. Geben Sie eine Basis und die Dimension des Bildes  $U$  von  $T$  an.

#### Aufgabe 4

Es sei  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die lineare Abbildung, die durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_4 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

- (a) Wie sieht die dazugehörige Matrix aus?
- (b) Geben Sie die Dimension und eine Basis für das Bild von  $f$  an.
- (c) Geben Sie die Dimension und eine Basis für den Kern von  $f$  an.

## Hausaufgaben

### Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden lineare Abbildungen. Geben Sie die zugehörige Abbildungsmatrizen an.

$$(a) f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} \quad (b) f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 6

Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Der Ausdruck  $\lambda x$  kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

$$(a) \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$$

$$(b) \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen?

### Aufgabe 7

Sei

$$F \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -3x + z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

- Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.
- Bestimmen Sie  $\ker(F)$  und dessen Dimension.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel  $\dim(\text{Bild}(F))$ .
- Geben Sie eine Basis des Bildes an.

### Aufgabe 8

Sei  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Die Abbildung

$$S : x \rightarrow x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene  $\langle x, v \rangle = 0$ . Hierbei stehen  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für das Standardskalarprodukt und  $\|\cdot\|$  für die euklidische Norm.

- Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall  $n = 2$ , dass es sich in der Tat bei  $S$  um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall  $n = 2$ ?).
- Zeigen Sie:  $S$  ist linear.
- Das *dyadische Produkt* zweier Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$  ist definiert als die Matrix  $A$  mit den Komponenten  $a_{ij} = v_i w_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Sei weiter  $f(x) := Ax$ . Zeigen Sie:  $\text{rg}(f) = 1$ .
- Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $S$ . Verwenden Sie dazu das dyadische Produkt.
- Ist  $S$  ein Isomorphismus? Wenn ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Andernfalls bestimmen Sie  $\ker(S)$  und  $\text{Bild}(S)$ !