Klausur **Lineare Algebra 1**, SS 2021, am 15.07.2021

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Wienke

keine Hilfsmittel

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Für welchen Wert für t sind a, b und c linear abhängig?

Ergebnis: $t = \frac{19}{14}$

Aufgabe 2 (6+6 Punkte)

In $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die letzte Koordinate x_3 von d so, dass d in der Ebene liegt, die die zu den Ortsvektoren a, b und c zugehörigen Punkte enthält.

   Ergebnis: $x_3 = 1$

b) Liegt d auf dem Rand des Dreiecks abc?

   Ergebnis: nein

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Schwimmer Thorsten möchte zu einer Insel schwimmen, die von seinem Standort aus 10 km entfernt in Richtung $(4,3)^T$ liegt. Er schwimmt in diese Richtung los, merkt jedoch nicht, dass er nach der Hälfte der Strecke in eine Strömung gerät und deshalb ab dann mit der Richtung $(2,1)^T$ weiter schwimmt.
Wie weit schwimmt Thorsten an der Insel vorbei und an welcher Stelle ist er der Insel am nächsten?

Ergebnis: Bei $N = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 42 \\ 26 \end{pmatrix}$ ist der Abstand zur Insel mit $d = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$ minimal.

Aufgabe 4 (4+4+4 Punkte)

Die Eifeler Wanderfreunde möchten eine Wandertour machen. Um zur Spitze des Mount Matse im Punkt $M = (4, -4, 6)$ zu gelangen, nutzen Sie zunächst den geradlinigen Weg w, der durch die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(5, 5, 5)$ verläuft. An dem Kreuzungspunkt K auf w, der M am nächsten ist, kreuzt der gradlinige Pfad p den Weg w. Von K ist es auf dem Pfad p genau gleich weit zu M in die eine Richtung wie zum Dorf D im Tal in die andere Richtung.

a) In welcher Ebene liegen sowohl w, p, M, K als auch D?

Ergebnis: z.B. E: $\lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) Berechnen Sie den Punkt K.

Ergebnis: $K = (2, 2, 2)$

c) Berechnen Sie die Koordinaten von D.

Ergebnis: $D = (0, 8, -2)$

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an!

Aufgabe 5 (4+4+2+3 Punkte)

Die drei Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide sollen in den folgenden Ebenen liegen:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} E_1: & & & 3y & - & z & = & 0 \\ E_2: & 9x & + & 12y & - & 10z & = & 0 \\ E_3: & 9x & - & 3y & + & 10z & = & 45 \end{array} .$$

Die Grundfläche liegt auf Nullniveau, also $z = 0$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Pyramidenspitze.

Ergebnis: Die Spitze liegt in $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die auf der Kante zwischen E_1 und E_2 liegen.

Ergebnis: g_{12}: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_{12} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_{12} \in \mathbb{R}$

c) Bestimmen Sie die Koordinaten für einen der drei Eckpunkte der Grundfläche. Welchen der drei Punkte Sie wählen, steht Ihnen frei.

Ergebnis: Folgende Punkte sind möglich: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Die Statiker raten dazu, auf der Höhe $z = 2$ ein Stahlband um die Pyramide zu legen. Welche Länge muss das Stahlband haben?

Ergebnis: Die Länge muss $L = \frac{10+\sqrt{10}}{3}$ betragen.

Aufgabe 6 (3+(3+2+3+2) Punkte)

a) Sei V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie: $V \setminus U$ ist niemals ein Untervektorraum von V.

keine Angabe

b) Bei welchen der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ handelt es sich um Untervektorräume? Belegen Sie Ihre Aussage durch Beweis oder Gegenbeispiel.
Im Fall eines Untervektorraums geben Sie seine Dimension und eine Basis an.

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2 \text{ und } x_1 \geq x_2\} \\ U_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1\} \\ U_3 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 1\} \\ U_4 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < x_2 \text{ und } x_1 > x_2\} \end{aligned}$$

keine Angabe

Aufgabe 7 (8+5 Punkte)

a) Wir bezeichnen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $a_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ und einen weiteren Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ definiert man einen neuen Vektor $a.x$ durch

$$a.x := \begin{pmatrix} a_1^2 x_1 \\ \vdots \\ a_n^2 x_n \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie: $\langle x, y \rangle_a := \langle a.x, a.y \rangle$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

keine Angabe

b) Wir betrachten den Spezialfall $n = 2$. Geben Sie alle Vektoren a an, für die die Vektoren $(1, 1)^T$ und $(1, -1)^T$ bezogen auf $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ senkrecht aufeinander stehen.

Ergebnis: $L = \{ \quad a = \begin{pmatrix} x \\ \pm x \end{pmatrix} \quad | \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \}$

Aufgabe 8 (4+4+5 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum.

a) Definieren Sie die lineare Unabhängigkeit von Vektoren.

keine Angabe

b) Definieren Sie die Dimension eines Vektorraums.

keine Angabe

c) Sei nun $\dim(V) = 2$ und Vektoren $x, y, z \in V$ gegeben mit $x - y - z = 0$.
Zeigen Sie: Sind x und y linear unabhängig, so bilden je zwei dieser Vektoren eine Basis von V.

keine Angabe