**Aufgaben zur Veranstaltung**
**Lineare Algebra 1, WS 2021/2022**

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

# Übungsblatt 13

## Selbstlernaufgaben

### Aufgabe 1

Berechnen Sie die Standardnorm der folgenden 2 Vektoren des Vektorraums $P_2$ der Polynome vom Grad $\leq 2$ bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

(a) $h_1(x) = 4x^2 + 6x + 3$

(b) $h_2(x) = -4x^2 + 10x + 2$

### Aufgabe 2

Gegeben sei ein Vektorraum $V$ und $M$ ein Tupel von Vektoren aus $V$. Untersuchen Sie die Eigenschaften „Lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus $M$", „$M$ bildet eine Basis", „$M$ bildet ein Erzeugendensystem" und „$M$ bildet ein minimales Erzeugendensystem":

(a) Welche Eigenschaften implizieren die jeweils anderen:

| | impliziert die Eigenschaft | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Eigenschaften | lin. unabh. | Basis | ES | OGB | ONS |
| linear unabhängig | | | | | |
| Basis | | | | | |
| Erzeugendensystem (ES) | | | | | |
| Orthogonalbasis (OGB) | | | | | |
| Orthonormalsystem (ONS) | | | | | |

(b) Finden Sie zu jeder der obigen Eigenschaften ein einfaches Beispiel, das nur die Eigenschaft selbst und die damit implizierten Eigenschaften erfüllt, alle anderen jedoch nicht.

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x = \left(-\frac{3}{5}\,,\, \frac{4}{5}\,,\, 0\right)^\top, \quad y = \left(\frac{4}{5}\,,\, \frac{3}{5}\,,\, 0\right)^\top, \quad z = (0\,,\, 0\,,\, 1)^\top$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.

### Aufgabe 4

Es sei $W$ der Unterraum des $\mathbb{R}^5$, der durch $u = (1\,,\, 2\,,\, 3\,,\, -1\,,\, 2)^\top$ und $v = (2\,,\, 4\,,\, 7\,,\, 2\,,\, -1)^\top$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an.

**Hausaufgaben**

**Diese Hausaufgaben in diesem Übungsblatt sind freiwillig.**

## Aufgabe 5

Betrachten Sie $\mathcal{C}[0,\pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

und $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Zeigen Sie, dass $f_k$ und $f_\ell$ für $k \neq \ell$ orthogonal sind.

*Hinweis:*

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \dfrac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}; & |a| \neq |b| \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4a}\sin(2ax) \qquad ; & a = b \end{cases}$$

## Aufgabe 6

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ? Gibt es ein $t$, für das diese $3$ Vektoren orthogonal zueinander werden?

## Aufgabe 7

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $L^\perp$ zu $L$, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension besitzt $L^\perp$ ?

## Aufgabe 8

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $U$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\dim(V) < \infty$, so gilt

$$V = U \oplus U^\perp$$

(b) Für zwei UntervektorrFärume $U_1$, $U_2$ gilt

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

(c) Für zwei Untervektorräume $U_1$, $U_2$ mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt

$$U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$$

(d) Gilt die erste Aussage auch auf beliebigen Vektorräumen? Tipp: Betrachten Sie Folgenräume.

## Übungsblatt 14

### Selbstlernaufgaben

#### Aufgabe 1

Sei $W$ die lineare Hülle der Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$W$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. Das orthogonale Komplement zu $W$ ist $W^{\perp}$. Schreiben Sie

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

als Summe $w = (w_1 + w_2)$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^{\perp}$.

#### Aufgabe 2

Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren $b, c$ an, die senkrecht auf dem Vektor

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

stehen. Orthonormieren Sie die drei Vektoren $a, b$ und $c$.

#### Aufgabe 3

Bilden die 3 Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Man bilde daraus ggf. eine Orthonormalbasis.

#### Aufgabe 4

Betrachten Sie auf $P_2$ das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, \mathrm{d}x$$

Konstruieren Sie aus der Basis $(1, x, x^2)$ eine Orthonormalbasis.

**Hausaufgaben**

**Diese Hausaufgaben in diesem Übungsblatt sind freiwillig.**

## Aufgabe 5

Gegeben sind folgende $3$ Vektoren in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie fest, ob die Vektoren $v_1, v_2$ und $v_3$ linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt aus $(v_1, v_2, v_3)$ ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist.

## Aufgabe 6

Geben Sie eine orthonormale Basis des Unterraums $W$ von $\mathbb{C}^3$ an, der durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.

Hinweis: $\langle z, w \rangle = z \cdot \overline{w}$

## Aufgabe 7

Es sei $\mathcal{B} = (1, x, x^3)$ eine Basis des Unterraums $U \subset P_3$. Orthonormalisieren Sie $\mathcal{B}$ mit dem Verfahren von Gram-Schmidt. Verwenden Sie folgendes Skalarprodukt:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ an.

## Aufgabe 8

Berechnen Sie die Bestapproximation des Punktes $V = (2, 3, 1)$ auf die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene durch den Nullpunkt. Klären Sie zunächst, wie die Bestapproximation in der analytischen Geometrie genannt wird. Nutzen Sie bei der Berechnung die orthogonale Projektion auf Unterräume. Bestimmen Sie auch den minimalen Abstand von $V$ zur Ebene.