Prof. Dr. Horst Schäfer, Yvonne Albrecht, M.Sc. FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Hausaufgabenblatt 11

1. Die von einer Maschine für einen bestimmten Arbeitsvorgang benötigte Zeit sei eine Zufallsvariable X, für deren Dichtefunktion in Abhängigkeit von einem $\vartheta \in [0;2]$ die Gestalt

$$f(x;\vartheta) = \begin{cases} \vartheta + 2\cdot(1-\vartheta)\cdot x & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unterstellt wird. Zu X liege eine einfache Stichprobe X_1, ... , X_n (die X_i sind unabhängig) vor.

   a) Zeigen Sie, dass die Schätzfunktionen

      i. $\hat{\Theta}_1 = 4 - \frac{6}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ ii. $\hat{\Theta}_2 = 3 - \frac{6}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

      erwartungstreu für ϑ sind.

   b) Überprüfen Sie zusätzlich, ob $\hat{\Theta}_1$ konsistent für ϑ ist.

2. Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Brenndauer einer Glühbirne einer bestimmten Sorte durch eine stetig verteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta \cdot x \cdot e^{-\theta \cdot x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \theta > 0$$

beschrieben werden kann. Schätzen Sie das für diese Sorte passende θ aufgrund der folgenden 15 Brenndauern (in 1000 Stunden) mittels der Maximum-Likelihood-Methode:

$1,5$	1	2	1	$1,5$
1	2	$0,5$	$2,5$	$1,5$
$1,5$	$1,5$	$1,5$	2	$1,5$

3. Peter nimmt an zehn aufeinanderfolgenden Tagen an einem Glückspiel mit einer Gewinnwahrscheinlichkeit $p \in (0;1)$ teil. Dabei spielt er das Spiel jeden Tag so oft, bis er einmal gewinnt. Danach hört er für diesen Tag auf. Nach dieser Strategie verfährt er an jedem der zehn Tage. Nachfolgend sind die Anzahlen der Spiele angegeben, die Peter an den einzelnen Tagen spielt:

$$13, \quad 7, \quad 10, \quad 2, \quad 11, \quad 17, \quad 15, \quad 9, \quad 19, \quad 11.$$

   a) Bestimmen Sie aufgrund einer Stichprobe vom Umfang n eine Maximum-Likelihood-Schätzung für die (unbekannte) Wahrscheinlichkeit p.

   b) Berechnen Sie den zugehörigen Maximum-Likelihood-Schätzwert, der sich für die oben angegebenen Anzahlen ergibt.

4. Die Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_n$ seien unabhängig und jeweils $N(0; \vartheta)$-verteilt, dabei ist $\vartheta > 0$ unbekannt. Die Dichte von X_1 ist also gegeben durch

$$f(x, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\vartheta}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter ϑ.

   b) Welcher der beiden Schätzer

      i. $S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ii. $T_n = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

      ist erwartungstreu, welcher ist asymptotisch erwartungstreu
      (d.h. Betrachtung des Grenzwert vom Erwartungswert der Schätzfunktion)?