**Aufgaben zur Veranstaltung**
**Stochastik, WiSe 2021/2022**

Prof. Dr. Horst Schäfer, Yvonne Albrecht M.Sc. FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

# Übungsblatt 13 - gemischte Aufgaben 11.01.2022

1. Die Produktion einer Produktes läuft über drei parallele Fertigungsstraßen. Die produzierten Teile der drei Fertigungsstraßen werden im Lager gemeinsam (d.h. nicht getrennt) gelagert. Für die drei Straßen gelten folgende Werte:

| | |
|---|---|
| Straße $1$: | $700$ Teile pro Stunde, wobei $80\%$ einwandfrei sind. |
| Straße $2$: | $800$ Teile pro Stunde, wobei $85\%$ einwandfrei sind. |
| Straße $3$: | $1.000$ Teile pro Stunde, wobei $65\%$ einwandfrei sind. |

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgenommenes Teil defekt ist.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgenommenes intaktes Teil von der 1.Fertigungsstraße stammt.
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgenommenes Teil defekt ist und auf Fertigungsstraße $2$ gefertigt wurde?

2. Für die Zufallsvariable $X$ sei folgende Dichtefunktion mit einer Konstanten $a$ gegeben

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^4 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten $a$, so dass $f(x)$ eine echte Dichtefunktion der Zufallsvariable $X$ darstellt.

   Führen Sie alle Berechnungen mit dem Wert für $a$ durch.

   b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Dichtefunktion:
      i) $P(X < 0,5)$ ii) $P(X > 0,7)$ iii) $P(0,6 < X < 0,8)$
   c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$.
   d) Berechnen Sie
      i) $E[X]$ und ii) $Var[X]$.

3. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seinen unabhängig und identisch verteilt mit der Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{\vartheta^3 \cdot x^5}{120} \cdot e^{-x \cdot \sqrt{\vartheta}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

   für ein $\vartheta > 0$. Die Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ mit $\min(x_1, \ldots, x_n) > 0$ seien eine Realisierung von $X_1, \ldots, X_n$.

   a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $L(\vartheta, x_1, \ldots, x_n)$.
   b) Berechnen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n)$ für $\vartheta$.

4. Ein berühmter Schokoriegel soll nach Angaben des Herstellers eine Länge von $10cm$ aufweisen. Bei der eingesetzten Anlage kann davon ausgegangen werden, dass die Längen der produzierten Riegel unabhängig und identisch normalverteilt sind mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 0,4cm^2$.
   Sie haben den Verdacht, dass der Hersteller mit der Längenangabe übertreibt. Um dies zu testen haben Sie eine Stichprobe von $n = 20$ Schokoriegeln gekauft, aus der sich $\overline{x} = 9,8cm$ ergab.

   a) Formulieren Sie die Hypothesen und führen Sie einen geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ durch. Bestätigt sich ihr Verdacht?

   b) Wie sieht Ihre Testentscheidung zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$ aus?