Klausur **Lineare Algebra 1**, SS 2021, am 20.09.2021

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Wienke

keine Hilfsmittel

Aufgabe 1 (10+2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Orthonormalisieren Sie die Vektoren a, b, c in der angegebenen Reihenfolge mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.

b) Begründen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

Aufgabe 2 (7+3+2 Punkte)

Eine Eisenbahngesellschaft betreibt drei Strecken A, B und C.

- Auf Strecke A kostet ein Ticket pro Person 5 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 4 EUR geschätzt.
- Auf Strecke B kostet ein Ticket pro Person 6 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 5 EUR geschätzt.
- Auf Strecke C kostet ein Ticket pro Person 3 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 5 EUR geschätzt.

Im vorherigen Jahr hatte die Eisenbahngesellschaft Ticketeinnahmen in Höhe von 30 Mio. Euro und Kosten in Höhe von 27 Mio. Euro.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und lösen es in allgemeiner Form, also für uneingeschränkte reelle Werte der Unbekannten.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrgäste auf den Strecken A und B in dem Wissen, dass der Staat den Betrieb auf Strecke C mit genau 1 Mio. Fahrgästen zur Bedingung für den Gesamtbetrieb ausgeschrieben hat.

c) Kann der Gewinn (Ticketeinnahmen - Kosten) durch eine Umverteilung auf den Strecken A und B bei unveränderter Gesamtanzahl aller Fahrgäste und genau 1 Mio. Fahrgästen auf Strecke C noch gesteigert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (2+4+4+2 Punkte)

Auf der Suche nach den Elektrokabeln in ihrem Altbau hat Erika folgende Kabel gefunden:

- Kabel A beginnt im Punkt (0,0,0) und geht von dort mit der Richtung $(3, -1, 1)^T$ weiter.
- Kabel B beginnt im Punkt (1,-1,1) und geht von dort mit der Richtung $(4, -1, 1)^T$ weiter.

Da zwischen den Kabeln eine Verbindung besteht, müssen die beiden an ihrem Schnittpunkt verbunden sein.

a) Zeigen Sie, dass die Kabel nicht parallel verlaufen.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Kabel.

c) An welcher Stelle muss eine Lampe an Position (5,-1,6) an Kabel A angeschlossen werden, wenn das Kabel zwischen der Lampe und Kabel A möglichst kurz sein soll.

d) Wie lang ist dann das Kabel zwischen der Lampe und Kabel A?

Aufgabe 4 (8+4 Punkte)

Es seien $(x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Handelt es sich bei den folgenden Abbildungen um Skalarprodukte?

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x, y) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x, y) = x_1^2 + 2x_2y_1 + y_1^2$

Wenn es sich um ein Skalarprodukt handelt, beweisen Sie dies; wenn nicht, widerlegen Sie dies durch ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 5 (3+4+3+3 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$?

a) $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

b) $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$

c) $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

d) $U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$

Wenn es sich um einen Untervektorraum handelt, beweisen Sie dies; wenn nicht, widerlegen Sie dies durch ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ seien linear unabhängig. Zeigen Sie: Dann sind die Vektoren

$$v_1 + v_2, \quad v_2 + v_3, \quad -v_3$$

linear unabhängig.

Aufgabe 7 (3+3+3+4 Punkte)

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, K ein Körper.

a) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit.

b) Definieren Sie den Begriff eines Erzeugendensystems von V.

c) Beweisen oder widerlegen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel: "Jedes Tupel linear unabhängiger Vektoren ist eine Basis."

d) Bekanntermaßen handelt es sich bei $\mathbb{R}^{2\times 2}$, der Menge aller reellen 2×2-Matrizen, zusammen mit der üblichen Addition von Matrizen und der üblichen Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar um einen reellen Vektorraum. Gegeben seien nun die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass es sich bei (A, B, C, D) um eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ handelt.

Aufgabe 8 (3+3+5+2 Punkte)

Sei V ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum und U ein Untervektorraum von V.

a) Definieren Sie die orthogonale Projektion eines Vektors v auf U.

b) Wir betrachten den Vektorraum $V := L(1, x^2 - 1/3\pi^2, \sin x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx, \quad f, g \in V.$$

Sie dürfen voraussetzen, dass es sich hierbei tatsächlich um ein Skalarprodukt auf V handelt. Es steht in obiger Definition $L(\cdots)$ für die lineare Hülle. Zeigen Sie: $(1, x^2 - 1/3\pi^2)$ ist eine Orthogonalbasis von $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$.

c) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $\sin x$ auf $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$.

d) Berechnen Sie das orthogonale Komplement von $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$ in V, also $(L(1, x^2 - 1/3\pi^2))^\perp$.