

1. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ergänzen Sie einen dritten Vektor, so dass die 3 Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des \mathbb{R}^n . Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.
b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugte Untervektorraum.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- a) Geben Sie eine Basis des Untervektorraums U an.
b) Ergänzen Sie diese Basis des Untervektorraums U zu einer Basis des \mathbb{R}^4
4. Gegeben sei $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in P_3$. Berechnen Sie die Koordinaten des Polynoms $p(x)$ bezüglich der Basis $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$.
5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionensysteme auf lineare Unabhängigkeit, wobei die Definitionsmenge immer \mathbb{R} ist:
- a) $\{x, e^{-x}, xe^{-x}\}$
b) $\{2, \sin^2 x, \cos^2 x\}$

Hausaufgaben (Abgabe bis 05.01.2022)

1. Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_1, f_2, f_3\}$ der reellen Funktionen genau dann linear unabhängig ist, wenn $\{f_1, f_1 + f_2, f_3\}$ linear unabhängig ist.

2. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β, γ ergibt sich eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionale lineare Hülle $L(a, b, c)$?

3. Bestimmen Sie $\dim(L(a, b, c))$ in Abhängigkeit von $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. $M = \{f, g, h, i\}$ sei eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum V mit $\dim(V) \geq 4$. Wie muss α gewählt werden, damit $\{f + g, g + h, h + i, i + \alpha \cdot f\}$ linear unabhängig sind?