Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2021/2022

FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 11 — 16.12.2021

1. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Ergänzen Sie einen dritten Vektor, so dass die 3 Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:

   a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.

   b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugte Untervektorraum.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

   a) Geben Sie eine Basis des Untervektorraums U an.

   b) Ergänzen Sie diese Basis des Untervektorraums U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

4. Gegeben sei $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in P_3$. Berechnen Sie die Koordinaten des Polynoms $p(x)$ bezüglich der Basis $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionensysteme auf lineare Unabhängigkeit, wobei die Definitionsmenge immer $\mathbb{R}$ ist:

   a) $\{x,\, e^{-x},\, xe^{-x}\}$

   b) $\{2,\, \sin^2 x,\, \cos^2 x\}$

Hausaufgaben (Abgabe bis 05.01.2022)

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$
   a) Geben Sie an, für welche t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.
   b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten.

2. Gegeben seien die Vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$
   Für welche α, β, γ ergibt sich eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionale lineare Hülle $L(a, b, c)$?

3. a) Zeigen Sie, dass das Tupel $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bildet:
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   b) Weiter sind die folgenden Vektoren $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ gegeben:
$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Tauschen Sie jeden der 3 Vektoren aus dem Tupel $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ so gegen einen Vektor aus der Menge $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ aus, dass wieder eine Basis im $\mathbb{R}^3$ entsteht. Gehen Sie dabei in jedem Schritt immer vom Tupel $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ aus, streichen ein $\vec{v}_i$ und ergänzen das verbliebene Tupel durch geeignete $\vec{w}_j$ zu einer Basis.

4. $M = \{f, g, h, i\}$ sei eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum V mit $dim(V) \geq 4$. Wie muss α gewählt werden, damit $\{f + g, g + h, h + i, i + \alpha \cdot f\}$ linear unabhängig sind?