Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2021/2022

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 10

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Sind (a, b, c) linear unabhängig?

(b) Wie lautet das Ergebnis, wenn man c durch $d = (-1,\ 1,\ 1)^\top$ ersetzt?

(c) Sind die Vektoren (a, b, c, f) linear unabhängig mit $f = (1,\ 3,\ 5)^\top$?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren in $\mathcal{C}[-\infty, \infty]$ linear unabhängig sind:

(a) $f_1(x) = 6$, $\quad f_2(x) = 3 \cdot \sin x$, $\quad f_3(x) = 2 \cdot \cos x$

(b) $f_1(x) = (3 - x)^2$, $\quad f_2(x) = x^2 + 6x$, $\quad f_3(x) = 5$

(c) $f_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $\quad f_2(x) = x^2$, $\quad f_3(x) = x$

Aufgabe 3

Stellen Sie (möglichst einfach) fest, ob folgende Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden. Stellen Sie ggf. fest, ob es eine Teilmenge der Vektoren gibt, die eine Basis bildet. Geben Sie jeweils die Dimension des Aufspanns an.

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Es sei (v_1, v_2) eine Basis eines zweidimensionalen reellen Vektorraums V. Man untersuche, für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ auch die beiden Vektoren $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ eine Basis von V bilden.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = x^2 + x, \qquad f_2(x) = x^2 - x - 2, \qquad f_3(x) = \alpha \cdot e^x + 1.$$

Bei welchem α funktioniert das übliche Verfahren zum Beweis der linearen Unabhängigkeit mit den Punkten $x_1 = 0, x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ nicht? Zeigen Sie anschließend, dass das Verfahren mit eben diesem α und den Punkten x_1, x_2 und $x_4 = 2$ sehr wohl funktioniert.

Aufgabe 7

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Weiter sind die folgenden Vektoren w_1, w_2, w_3 gegeben:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie jeden der 3 Vektoren aus des Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ so gegen einen Vektor aus der Menge $\{w_1, w_2, w_3\}$ aus, dass wieder eine Basis im $\mathbb{R}^3$ entsteht.

Hinweis: Dabei soll jeweils aus der Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ genau ein Vektor ausgetauscht werden.

Aufgabe 8

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) Geben Sie an, für welche t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $x = (2,\ 1,\ 1)^\top$ erhalten.