Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2021/2022

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 9

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bildet die Menge $\mathbb{R}^3$ bzgl. der folgenden Verknüpfungen einen Vektorraum?

(a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \cdot x_1 \\ 2\alpha \cdot x_2 \\ 2\alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind:

(a) $W_1 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = x_2\}$

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2\}$

(c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 4

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Form hat die lineare Hülle der beiden Vektoren?
Stellen Sie die lineare Hülle in Normalform und in Parameterform dar.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}^+$ aller echt positiven reellen Zahlen mit den Verknüpfungen $x \oplus y := xy$ und $\lambda \odot x := x^\lambda, x, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, ein reeller Vektorraum ist.

Aufgabe 6

Gegeben sind zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Sind U_1, U_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$?

(a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \det(a, b, x) = 0\}$

(b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \det(a, b, x) = 1\}$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die lineare Hülle von

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in Normalform. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{pmatrix} 2c^2 - \frac{3}{c} \\ 6c \\ \frac{1}{4c} - 2c^2 \end{pmatrix}$$

Element des von a und b aufgespannten Untervektorraums ist.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die lineare Hülle der Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Raum $\mathbb{R}^3$ ist.