Prof. Dr. Horst Schäfer, Yvonne Albrecht M.Sc. FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 04 26.10.2021

1. Zwei unterscheidbare Würfel werden gleichzeitig geworfen und die Summe der beiden Augenzahlen betrachtet.

   a) Bestimmen Sie die Ereignismenge der möglichen 2er Tupel (zwei Würfel), die eine gerade Augensumme bilden.

   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine gerade bzw. ungerade Augensumme zu würfeln.

   Im Anschluss wird mit den zwei Würfeln dreimal ein "Doppelwurf" ausgeführt. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der insgesamt geraden Augensumme.

   c) Bestimmen Sie von der Zufallsvariable X

      i. die Wahrscheinlichkeitsfunktion ii. die Verteilungsfunktion

   d) Stellen Sie die Funktionen grafisch dar (Stabdiagramm und Verteilungsfunktion).

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass die diskrete Zufallsvariable N den Wert k annimmt, sein gegeben durch

$$P(N = k) = \log_{10}\left(\frac{k+1}{k}\right) \quad \text{für } k = 1, \cdots, m \in \mathbb{N}$$

   Welchen Wert muss m haben?

3. Die Dichtefunktion einer stetigen Verteilung laute

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(3-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   a) Bestimmen Sie den Parameter a.

   b) Wie lautet die zugehörige Verteilungsfunktion?

   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich 2 annimmt

      i. über die Dichtefunktion ii. über die Verteilungsfunktion

4. Sei X eine Zufallsvariable mit einer stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$ der Form

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x & \text{für } -2 \leq x \leq 0 \\ c_1 + c_2(1 - e^{-x}) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

   a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2.
   b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens den Wert 2 annimmt, wenn man weiß, dass X positiv ist.

Zusatzaufgaben

5. Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen Verteilungsfunktionen sind und finden Sie gegebenenfalls eine passende Dichtefunktion, d.h. eine nichtnegative Funktion f mit $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$. Skizzieren Sie $F(x)$ und eventuell $f(x)$.

   a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{8}x^3 & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & \text{für } x > \pi \end{cases}$

6. Die "Intaktwahrscheinlichkeiten" (Wahrscheinlichkeit, dass eine Anlage, Baugruppe, Bauelement etc. wie vorgesehen arbeitet), bezogen auf ein festes Zeitintervall, betragen für zwei unabhängig voneinander arbeitende Anlagen $0,9$ bzw. $0,8$. Die Zufallsgröße X sei die zufällige Anzahl der in einem solchen Zeitintervall intakten Anlagen. Bestimmen Sie:

   a) die Verteilungstabelle von X und das entsprechende Stabdiagramm,
   b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens eine Anlage intakt ist,
   c) die Verteilungsfunktion von X mit einer grafischen Darstellung.

7. Die Zufallsvariable X beschreibe die größte der beiden Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf. Bestimmen Sie

   a) $P(X \leq 5)$ b) $P(X < 5)$ c) $P(X < 5,5)$ d) $P(X \geq 4)$

8. Die Cauchy-Verteilung ist definiert durch die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi \cdot (1 + x^2)}$$

   Diese Verteilung findet Anwendung in der Modellierung von Zufallsexperimenten, bei denen seltene, extrem große Beobachtungswerte auftreten, z.B. bei Schadensversicherungen gegen Naturkatastrophen.

   a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Cauchy-Verteilung und zeigen Sie, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$ ist.
   b) Berechnen Sie $P(2 < X \leq 10)$ für eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable X.