Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2021/2022

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 5

Selbstlernaufgaben

In den folgenden Aufgaben sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt.

Aufgabe 1

Berechnen Sie $a \times b$ für die Vektoren

(a) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie außerdem für die Teile a) und b) $b \times a$, $-b \times a$, $a \times a$, $\langle a \times b, b \rangle$, $\langle a \times b, a \rangle$ und $(a \times b) \times b$. In welche Richtung zeigt der letzte Vektor?

Aufgabe 2

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Man beweise die Graßmannsche Identität

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c.$$

Aufgabe 3

Gegeben sind 2 Punkte $A = (a_x, a_y)$ und $B = (b_x, b_y)$ im $\mathbb{R}^2$. Sie sind zusammen mit dem Nullpunkt die Eckpunkte eines Dreiecks. Geben Sie eine Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks an.

Tipp: Betrachten Sie die Punkte im dreidimensionalen Raum (die 3. Koordinate ist Null!) und benutzen Sie das Vektorprodukt.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgenden Punkte alle auf einer Geraden liegen.

$A_1 = (1; 3)$, $A_2 = (-2; 4)$, $A_3 = (10; 0)$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Berechnen Sie für die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Produkte

$$\langle a \times b, c \rangle \quad \text{und} \quad \langle a, b \times c \rangle.$$

Aufgabe 6

Die Vektoren $v_n \in \mathbb{R}^3$ sind definiert durch

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_n = v_{n-1} \times a, \text{ wobei } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$v_{2n} = (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass das Volumen eines Tetraeders, der von drei nicht in einer Ebene liegenden Vektoren a,$b, c \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird, durch

$$V = \tfrac{1}{6} \left| \langle a \times b, c \rangle \right|$$

gegeben ist.
Tipp: Sie können im Beweis verwenden, dass für das Volumen V einer Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h gilt: $V = \frac{1}{3} G\, h$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte

(a) $A = (-2; 1)$ und $B = (2; 2)$

(b) $A = (1; 2; 3)$ und $B = (3; 1; 2)$