Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 4

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Zerlegung des Vektors $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in die Richtungen der Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ wobei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b \perp a$, so dass gilt: $d = \alpha a + \beta b$
Versuchen Sie auf ein lineares Gleichungssystem zu verzichten. (Zeichnerische und rechnerische Lösung!).

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren

(a) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

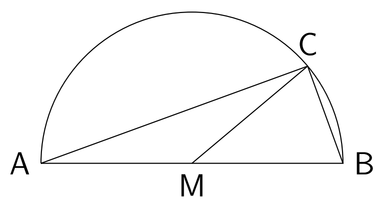
Aufgabe 3

Prüfen Sie nach, ob die folgenden Punkte Eckpunkte eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck sein können, d.h. ob 2 der Verbindungslinien gleich lang sind und einen rechten Winkel bilden.

$$P_1 = (1, 1 + \sqrt{3}), \quad P_2 = (2 + \sqrt{3}, 2), \quad P_3 = (3, 1 - \sqrt{3})$$

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass jedes Dreieck A,B,C, das wie in der Skizze dargestellt konstruiert wurde, rechtwinklig ist. (Satz des Thales)
Dabei liegt der Punkt C auf dem Halbkreis über A und B.



Hinweis: Sie erkennen am Skalarprodukt zweier Vektoren, ob die Vektoren senkrecht zueinander stehen. Für einen Vektor a gilt für das euklidische Skalarprodukt und die euklidische Norm $\langle a, a \rangle = \|a\|^2$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Durch 4 Punkte A, B, C und D ist ein beliebiges Viereck gegeben. Zeigen Sie: Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$, dann sind diese Strecken parallel (Skizze!). Dies gilt auch, wenn A, B, C und D in $\mathbb{R}^3$ und auch nicht in einer Ebene liegen.

Aufgabe 6

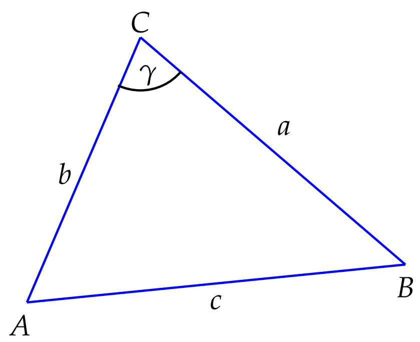
Berechnen Sie den Winkel zwischen der Raumdiagonalen eines Würfels und den Kanten.

Aufgabe 7

Zeigen Sie: In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c gilt der Kosinussatz:

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\gamma),$$

wobei γ der Innenwinkel des Dreiecks zwischen den durch a und b dargestellten Seiten ist.



Aufgabe 8

Wir betrachten nun das Standardskalarprodukt.

(a) Wie kann man $\sum_{k=1}^{n} a_k$ als Skalarprodukt des Vektors $a = (a_1, ..., a_n)$ mit einem Vektor b darstellen? Wie muss dieser Vektor b aussehen?

(b) Beweisen Sie, dass gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \|a\|_1 \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\|a\|_2$$

Hinweis: Benutzen Sie Teil a) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.