Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2021/2022

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 3

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & -x_2 & + & ax_3 & = & b \end{array} \right\}$$

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ existiert keine bzw. eine bzw. unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $a = \frac{2}{5}$ und $b = \frac{12}{5}$.

Aufgabe 2

Es sei $\|\cdot\|$ die Norm, die von dem Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ induziert wird.
Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren a und b gilt:

(a) $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$

(b) $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

(c) $\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$

Aufgabe 3

Ein Eskimo startet eine Wanderung an seinem Iglu in Grönland. Er geht 10 km in südliche Richtung und anschließend $10 \cdot \sqrt{2}$ km in südwestliche Richtung. Danach wandert er 10 km nach Osten. Wieviel km ist er jetzt etwa von seinem Iglu entfernt?

Aufgabe 4

Berechnen Sie den euklidischen Abstand der Punkte von

(a) $A = (-1; 2)$ und $B = (3; 4)$

(b) $C = (1; 2; 3)$ und $D = (3; -3; 5)$

voneinander.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem a) keine, b) genau eine oder c) unendlich viele Lösungen? Es ist der Gauß-Algorithmus zu benutzen!

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 4y & + & (3t^2-1)z & = & (t-1) \end{array} \right\}$$

Aufgabe 6

Welcher Punkt hat von den Punkten $A = (0,1)$, $B = (0,7)$ und $C = (4,9)$ den gleichen euklidischen Abstand? Tipp: P sei der gesuchte Punkt. Es muss für die zugehörigen Ortsvektoren gelten:

$$\|p-a\| = \|p-b\| = \|p-c\|$$

Aufgabe 7

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt und $\|\cdot\| = (\langle \cdot, \cdot \rangle)^{1/2}$ die daraus abgeleitete Norm. Welche der folgenden Gleichungen bzw. Aussagen sind für beliebige Vektoren a, b, c richtig? Hierbei sei $a^2 := \langle a, a \rangle$. Beweisen Sie die jeweilige Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel!

(a) $\langle a, b \rangle \langle b, a \rangle = 2\langle b, a \rangle$ (b) $\langle a, c \rangle a = a^2 c$

(c) $b = \sqrt{b^2}$ (d) $\langle a+b, a-b \rangle = a^2 - b^2$ (e) $\dfrac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b = a$

(f) $\langle a, b \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$

Aufgabe 8

Ein Hochhaus-Fallschirmspringer (Base Jumper) springt von einem 21 Meter hohen Hochhaus in nordöstliche Richtung. Seine Flugbahn beschreibt eine Gerade. Seine Geschwindigkeit ist konstant; pro Sekunde fällt der Artist $\sqrt{2}$ Meter in Richtung Nordost und 2 Meter in die Tiefe. Das Podest, auf dem der Fallschirmspringer landen soll, hat einen Radius von 3 Metern und ist 1 Meter hoch. Die Mitte des Podests befindet sich von der Hausecke, von wo der Artist springt, gesehen, 11 Meter in östlicher und 10 Meter in nördlicher Richtung. Hinweis: Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein.

(a) Bestimmen Sie darin die Koordinaten der wesentlichen Punkte:
   - Absprungstelle,
   - Mittelpunkt des Podests und
   - Landepunkt auf dem Podest.

(b) Welche Strecke legt der Artist im Flug zurück?

(c) Wie lange dauert der Flug?

(d) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers?