Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2020/2021

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 13

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Sei W die lineare Hülle der Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. Das orthogonale Komplement zu W ist $W^\perp$. Schreiben Sie

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

als Summe $w = (w_1 + w_2)$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$.

Aufgabe 2

Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren b, c an, die senkrecht auf dem Vektor

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

stehen. Orthonormieren Sie die drei Vektoren a, b und c.

Aufgabe 3

Bilden die 3 Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Man bilde daraus ggf. eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 4

Betrachten Sie auf P_2 das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, \mathrm{d}x$$

Konstruieren Sie aus der Basis $(1, x, x^2)$ eine Orthonormalbasis.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Gegeben sind folgende 3 Vektoren in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie fest, ob die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt aus (v_1, v_2, v_3) ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist.

Aufgabe 6

Geben Sie eine orthonormale Basis des Unterraums W von $\mathbb{C}^3$ an, der durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.

Hinweis: $\langle z, w \rangle = z \cdot \overline{w}$

Aufgabe 7

Es sei $\mathcal{B} = (1, x, x^3)$ eine Basis des Unterraums $U \subset P_3$. Orthonormalisieren Sie $\mathcal{B}$ mit dem Verfahren von Gram-Schmidt. Verwenden Sie folgendes Skalarprodukt:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ an.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Bestapproximation des Punktes $V = (2, 3, 1)$ auf die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene durch den Nullpunkt. Klären Sie zunächst, wie die Bestapproximation in der analytischen Geometrie genannt wird. Nutzen Sie bei der Berechnung die orthogonale Projektion auf Unterräume. Bestimmen Sie auch den minimalen Abstand von V zur Ebene.