Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 12

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Standardnorm der folgenden 2 Vektoren des Vektorraums P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

(a) $h_1(x) = 4x^2 + 6x + 3$ (b) $h_2(x) = -4x^2 + 10x + 2$

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Vektorraum V und M ein Tupel von Vektoren aus V. Untersuchen Sie die Eigenschaften „Lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus M“, „M bildet eine Basis“, „M bildet ein Erzeugendensystem“ und „M bildet ein minimales Erzeugendensystem“:

(a) Welche Eigenschaften implizieren die jeweils anderen:

	impliziert die Eigenschaft				
Eigenschaften	lin. unabh.	Basis	ES	OGB	ONS
linear unabhängig					
Basis					
Erzeugendensystem (ES)					
Orthogonalbasis (OGB)					
Orthonormalsystem (ONS)					

(b) Finden Sie zu jeder der obigen Eigenschaften ein einfaches Beispiel, das nur die Eigenschaft selbst und die damit implizierten Eigenschaften erfüllt, alle anderen jedoch nicht.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x = \left(-\frac{3}{5}\,, \frac{4}{5}\,, 0\right)^\top, \quad y = \left(\frac{4}{5}\,, \frac{3}{5}\,, 0\right)^\top, \quad z = (0\,,\,0\,,\,1)^\top$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.

Aufgabe 4

Es sei W der Unterraum des $\mathbb{R}^5$, der durch $u = (1\,,\,2\,,\,3\,,\,-1\,,\,2)^\top$ und $v = (2\,,\,4\,,\,7\,,\,2\,,\,-1)^\top$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Betrachten Sie $\mathcal{C}[0,\pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

und $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Zeigen Sie, dass f_k und f_ℓ für $k \neq \ell$ orthogonal sind.

Hinweis:

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \dfrac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}; & |a| \neq |b| \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4a}\sin(2ax) \qquad\qquad\qquad ; & a = b \end{cases}$$

Aufgabe 6

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Gibt es ein t, für das diese 3 Vektoren orthogonal zueinander werden?

Aufgabe 7

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $L^\perp$ zu L, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension besitzt $L^\perp$?

Aufgabe 8

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und U ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\dim(V) < \infty$, so gilt
$$V = U \oplus U^\perp$$

(b) Für zwei Untervektorräume U_1, U_2 gilt
$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

(c) Für zwei Untervektorräume U_1, U_2 mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt
$$U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$$

(d) Gilt die erste Aussage auch auf beliebigen Vektorräumen? Tipp: Betrachten Sie Folgenräume.