FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra I, WS 2012/13, am 04.02.2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

1. Gegeben ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Zeigen Sie, dass es sich bei B um eine Basis handelt.

   (b) Wandeln Sie B in der angegebenen Reihenfolge mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens in eine Orthonormalbasis um.

2. Zu Beginn des neuen Schuljahres kaufen Peter, Renate und Sarah im gleichen Schreibwarengeschäft ihre Hefte für das neue Schuljahr. Renate bezahlt für 1 großes, 3 mittlere und 1 kleines Heft 4,27 €. Peter bezahlt für 3 große, 5 mittlere und 2 kleine Hefte 8,75 €. Sarah bezahlt für 2 große, 2 mittlere und 1 kleines Heft 4,48 €.

   (a) Kann man aus diesen Angaben ermitteln, wieviel große, mittlere und kleine Hefte kosten?

   (b) Thomas braucht 4 große, 8 mittlere und 3 kleine Hefte. Er behauptet, dass er aus den Angaben der anderen errechnen kann, wieviel er zu zahlen hat. Wieviel muss er für seinen Einkauf ausgeben?

3. Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind.

$$U_1 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2, a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

$$U_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \leq 0\}$$

4. Sei für $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ die quadratische Matrix A_n rekursiv definiert durch

$$A_n = \left(\begin{array}{c|ccc} n & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad A_1 = (1)$$

und $\vec{e}_n$ rekursiv definiert durch $\vec{e}_n = (1, \vec{e}_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1 = (1)$.
Man zeige durch vollständige Induktion über n:

$$A_n \vec{e}_n = (2n-1, 2n-3, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$$

5. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem keine, genau eine und mehrere Lösungen?
   Geben Sie alle Lösungen an.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & a \cdot z & = & 14 + b \\ & & y & + & a \cdot z & = & b + 2 \\ 2x & + & 2y & + & a \cdot z & = & 11 + b \end{array}$$

6. Eine neue Skipiste soll entworfen werden. Dazu liegen folgende Angaben vor:

   - Die linke Seite der Piste ist u.a. durch zwei Grenzpunkte an den Stellen $A = (3; 2; 0)$ sowie $B = (0; 3; 2)$ abgegrenzt.
   - Die rechte Seite der Skipiste wird durch die Punktemenge $C_k = (1 + 3k; 2 - k; 4 - 2k)$ modelliert.
   - Auf dem Hang, auf dem die Piste geplant wird, befindet sich bereits eine Seilbahn, die durch die Punktemenge $S_r = (-2r; 3 + r; 4)$ beschrieben wird.

   (a) Zeigen Sie, dass die beiden Grenzen der Skipiste parallel verlaufen, aber nicht identisch sind.

   (b) Stellen Sie die Ebenengleichung, durch welche die Skipiste beschrieben wird, in Normalenform auf.

   (c) Um Unfälle zu vermeiden, muss noch eine rote Wartelinie simuliert werden. Diese soll rechtwinklig zur Skipiste von Grenzpunkt A zu einem bestimmten Grenzpunkt auf der anderen Pistenbegrenzung verlaufen. Bestimmen Sie diesen Punkt.

   (d) Die Seilbahn schwebt in gleichmäßiger Höhe über der Piste. Bestimmen Sie diese Höhe.

7. Betrachten Sie die folgenden Mengen M_i in den angegebenen euklidischen Räumen V_i:

(i)
$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, V_1 = \mathbb{R}^2 \text{ mit Standardskalarprodukt}$$

(ii)
$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}, V_2 = \mathbb{R}^3 \text{ mit Standardskalarprodukt}$$

(iii)
$$M_3 = \left\{ \ln(x), \ln(x^5) \right\}, V_3 = C[1,2], \langle f, g \rangle = \int_1^2 f(x) \cdot g(x)\, dx$$

(iv)
$$M_4 = \left\{ 1, x + \frac{1}{2} \right\}, V_4 = C[-1,0], \langle f, g \rangle = \int_{-1}^0 f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Hinweis: Mit $C[a,b]$ ist der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ gemeint.

Untersuchen Sie jeweils, ob es sich um ein linear unabhängiges System, ein Erzeugendensystem (ES), eine Basis, ein Orthogonal- (OGS) und/oder ein Orthonormalsystem (ONS) handelt.
Kennzeichnen Sie Zutreffendes mit „X“ und nicht Zutreffendes mit „-“. Achtung: Leere Kästchen werden sowohl für Zutreffendes als auch für nicht Zutreffendes als falsche Antwort von Ihnen bewertet.

	lin. unabh.	ES	Basis	OGS	ONS
M_1					
M_2					
M_3					
M_4					

Begründen Sie im Fall (iv) Ihre Antwort.

8. (a) Begründen Sie, warum die folgenden Abbildungen f_1, f_2 von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nicht die Eigenschaften eines Skalarproduktes haben:

$$f_1(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

$$f_2(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2$$

(b) Begründen Sie, warum die folgende Abbildung f_3 von $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ nicht die Eigenschaft eines Skalarproduktes hat:

$$f_3(\vec{x}, \vec{y}) = Re(x_1) \cdot Im(y_1) + Im(x_2) \cdot Re(y_2)$$