Fachbereich Medizintechnik & Technomathematik
Lehrgebiet für Angewandte Informatik
Prof. Dr. rer. nat. Jörg Striegnitz

Algorithmen und Datenstrukturen

Sommersemester 2019

3. Übung / Lösungsvorschlag

1. Aufgabe

(a) Lösen Sie die folgende lineare Rekursionsgleichung mit Hilfe von Erzeugenden Funktionen:

$$T(n) = \begin{cases} 4 \cdot T(n-3) + 4 \cdot T(n-2) - 1 \cdot T(n-1) & \text{falls } n > 2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Geben Sie für die folgende Rekursionsgleichung eine möglichst genaue Abschätzung in O-Notation an:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{sonst} \\ 7 \cdot T\left(\frac{16n}{81}\right) + \sqrt{n} & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

(a) Zuerst stellen wir die Erzeugende Funktion auf:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$$

Jetzt ziehen wir so viele Summanden aus der Summe, bis wir den rekursiven Teil der Gleichung anwenden dürfen; das ist ab $n = 3$ der Fall:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n \\ &= T(0) \cdot x^0 + T(1) \cdot x^1 + T(2) \cdot x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} T(n) \cdot x^n \\ &= 1 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} T(n) \cdot x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} [4 \cdot T(n-3) + 4 \cdot T(n-2) - 1 \cdot T(n-1)] \cdot x^n \end{aligned}$$

Wir spalten die Summe auf und ziehen konstante Faktoren vor die Summe:

$$\begin{aligned} F(x) &= 1+x+x^2+\sum_{n=3}^{\infty}[4\cdot T(n-3)+4\cdot T(n-2)-1\cdot T(n-1)]\cdot x^n \\ &= 1+x+x^2+4\cdot\sum_{n=3}^{\infty}T(n-3)\cdot x^n+4\cdot\sum_{n=3}^{\infty}T(n-2)\cdot x^n-\sum_{n=3}^{\infty}T(n-1)\cdot x^n \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden jeweils der Exponent von x und das Argument an T angeglichen, indem eine passende Potenz von x ausgeklammert wird. Für die erste Summe haben wir z.B. $T(n-3)\cdot x^n$ und klammern daher x^3 aus; wir erhalten:

$$F(x) = 1+x+x^2+4x^3\cdot\sum_{n=3}^{\infty}T(n-3)\cdot x^{n-3}+4x^2\cdot\sum_{n=3}^{\infty}T(n-2)\cdot x^{n-2}-x\cdot\sum_{n=3}^{\infty}T(n-1)\cdot x^{n-1}$$

Offenbar lässt sich die erste Summe zu $\sum_{n=0}^{\infty}T(n)\cdot x^n$ umschreiben, was unserem $F(x)$ entspricht. Die zweite und die dritte Summe können wir auf ähnliche Weise auf $F(x)$ zurückführen:

$$\begin{aligned} 4x^2\cdot\sum_{n=3}^{\infty}T(n-2)\cdot x^{n-2} &= 4x^2\cdot\left[\left(\sum_{n=2}^{\infty}T(n-2)\cdot x^{n-2}\right)-T(0)\cdot x^0\right] \\ &= 4x^2\cdot[F(x)-1] \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x\cdot\sum_{n=3}^{\infty}T(n-1)\cdot x^{n-1} &= x\cdot\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}T(n-1)\cdot x^{n-1}\right)-T(0)\cdot x^0-T(1)\cdot x^1\right] \\ &= x\cdot[F(x)-1-x] \end{aligned}$$

und erhalten so eine Gleichung ohne "störende" Summen, die wir nach $F(x)$ auflösen können:

$$\begin{aligned} F(x) &= 1+x+x^2+4x^3\cdot F(x)+ \\ &\quad 4x^2\cdot[F(x)-1]-x\cdot[F(x)-1-x] \\ &= 1+x+x^2+4\cdot x^3\cdot F(x)+ \\ &\quad 4x^2\cdot F(x)-4x^2-x\cdot F(x)+x+x^2 \\ -4\cdot x^3\cdot F(x)-4x^2\cdot F(x)+x\cdot F(x)+F(x) &= 1+2x-2x^2 \\ F(x) &= \frac{-2x^2+2x+1}{-4x^3-4x^2+x+1} \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Nullstellen zu $-4x^3-4x^2+x+1$ mit Hilfe des Satzes von Vieta; zunächst teilen wir durch -4, erhalten

$$f(x)=x^3+x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$

und setzen an:

$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2\cdot x_3 &= \frac{1}{4} \\ x_1.x_2+x_1\cdot x_3+x_2x_3 &= \frac{1}{4} \\ x_1+x_2+x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Als Lösung finden wir wir $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$, also

$$f(x) = (x+1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Beziehungsweise (mit reziproken Nullstellen):

$$f(x) = (1+x) \cdot (1 + 2 \cdot x) \cdot (1 - 2 \cdot x)$$

Wir fahren mit der Partialbruchzerlegung fort:

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(1+x) \cdot (1+2 \cdot x) \cdot (1 - 2 \cdot x)} &= \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1+2x)} + \frac{C}{(1-2x)} \\ &= \frac{A \cdot (1+2x)(1-2x) + B \cdot (1+x)(1-2x) + C \cdot (1+x)(1+2x)}{(1+x) \cdot (1+2 \cdot x) \cdot (1-2 \cdot x)} \end{aligned}$$

Offenbar müssen die Zähler identisch sein - insbesondere auch an den Nullstellen! Wir erhalten folgende Gleichungen durch Einsetzen der Nullstellen für x:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -\frac{1}{2} \\ C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{(1+x)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(1+2x)} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-2x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2}(-2)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} 2^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n - \frac{(-2)^n}{2} + \frac{2^n}{2} \right) x^n \end{aligned}$$

Also ergibt sich:

$$T(n) = 2^{n-1} + (-2)^{n-1} + (-1)^n$$

(b) Da nur nach einer Abschätzung gefragt wurde, können wir das Master-Theorem anwenden.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{sonst} \\ 7 \cdot T\left(\frac{9n}{64}\right) + \sqrt{n} & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Offenbar sind $a = 7$, $b = \frac{81}{16}$ und $d(n) = \sqrt{n}$, also $d(n) \in O(n^{\frac{1}{2}})$ und somit $\gamma = \frac{1}{2}$ und $b^\gamma = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$. Da $7 > \frac{9}{4}$ trifft der 3. Fall des Master-Theorems zu und es gilt

$$T(n) \in O\left(n^{\log_{\frac{81}{16}} 7}\right)$$