Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2020/2021

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 7

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Ein Flugzeug benötigt bei Gegenwind bis zum Abheben 500 m und startet dann in Richtung $(3;1)$. Bei Rückenwind hebt das Flugzeug erst nach 750 m ab und startet in Richtung $(4;1)$. Am Ende der 1 km langen Startbahn steht ein 10 m hoher Beleuchtungsmast. Wie groß ist der Mindestabstand des Mastes zu der Flugbahn bei Gegen- bzw. Rückenwind?

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Determinanten durch Anwendung der Regeln, so dass die Rechnung einfach wird:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ a & b & c \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie mit Hilfe einer Determinanten, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im $\mathbb{R}^3$ besitzen:

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$
$$E_3 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die folgenden 3 Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben. Bestimmen Sie anschließend die Schnittmenge.

$$E_1 : x_1 + x_3 = 4, \qquad E_2 : 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \qquad E_3 : 2x_2 + x_3 = 11$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Welche Abstände haben die Punkte $Q = (7; 4; 5)$ und $R = (-4; -6; -3)$ von der Ebene

$$\langle x, n\rangle = \langle p, n\rangle \quad \text{mit} \quad p = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie im $\mathbb{R}^3$ durch Rückführung auf das Spatprodukt und (gegebenenfalls) komponentenweises Ausmultiplizieren:

(a) **D1**. $\det(a, b, c) = \det(c, a, b) = \det(b, c, a)$

(b) **D2**. $\det(a, b, c) = -\det(b, a, c)$

(c) **D3**. $\det(a, a, c) = 0$

Aufgabe 7

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren a und b aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Aufgabe 8

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 11 \end{aligned}$$

keine eindeutige Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?