Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2020/2021

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 8

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bilden Sie eine Gruppe aus nur zwei Elementen 0 und 1. Dabei soll 0 das neutrale Element sein. Welche Ergebnisse müssen die 4 Operationen

$$\begin{array}{ccc} 0 & \circ & 0 \\ 0 & \circ & 1 \\ 1 & \circ & 0 \\ 1 & \circ & 1 \end{array}$$

haben? Begründen Sie die Ergebnisse mit den Gruppenaxiomen.

Aufgabe 2

Für $x = (x_1, x_2)^T$ und $y = (y_1, y_2)^T$ aus $\mathbb{R}^2$ ist folgende Multiplikation definiert:

$$x \circ y = \begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob die Menge $\mathbb{R}^2$ mit der gegebenen Abbildung $\circ$ eine Gruppe bildet. Geben Sie ggf. eine möglichst große Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ an, sodass M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe bildet.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die dreidimensionalen Vektoren mit der Addition und dem Vektorprodukt keinen Körper bilden.

Aufgabe 4

Der 10 km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4 km Seitenlänge, soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden. Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zurücklegt. Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x_1- bzw. x_3-Koordinatenachsen verlaufen, nähert sich das Objekt entlang der Geraden

$$g : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

Machen Sie zuerst eine Skizze. Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (x_1x_3)-Ebene liegt. Wo liegt der Austrittspunkt? Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

In einem Berghang steht ein 20 Meter hoher Turm mit einem Funksender auf der Spitze, dessen Reichweite in alle Richtungen 100 Meter beträgt. Der Berghang hat eine gleichmäßige Steigung von 100 % (entspricht $45°$ zur horizontalen Fläche) und ist ein Südhang, d.h. die Talsohle liegt im Süden, der Gipfel im Norden.

(a) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung zwischen Sender und Berghang.

(b) Berechnen Sie für jede der vier Himmelsrichtungen den Punkt, an dem man den Sender gerade noch empfangen kann.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!

Aufgabe 6

Bildet $\mathbb{N}_0$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche Gruppe?

Aufgabe 7

Auf der Menge der Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist die folgende Abbildung definiert:

$$a \circ b = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Hat diese Verknüpfung ein neutrales Element?
Für welche Elemente $a \in \mathbb{R}^3$ hat diese Verknüpfung ein inverses Element?
Gibt es eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ mit mehr als einem Element, die bzgl. dieser Verknüpfung eine (evtl. nicht kommutative) Gruppe bildet?

Aufgabe 8

Seien $G_1 = (M_1, +)$ und $G_2 = (M_2, \circ)$ Gruppen. Man definiert auf $M_1 \times M_2$ eine Verknüpfung $\star$ durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 \circ b_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beweisen Sie: $G := (M_1 \times M_2, \star)$ bildet eine Gruppe.

(b) Sind G_1 und G_2 abelsch, dann ist auch G abelsch.