Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 12 — 15.06.2020

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist. Berechnen Sie außerdem die komplexen Eigenwerte. Zeigen Sie dann, dass der Betrag der Eigenwerte von A tatsächlich 1 ist.

Aufgabe 2

Eine Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Matrix A.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mittels der Diagonalisierung A^8 für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: $\lambda = 0$ ist Eigenwert der Matrix A genau dann, wenn gilt: $\det(A) = 0$.

Aufgabe 5

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

(b) Gibt es einen Fixpunkt (d.h. existiert ein Vektor x mit $Ax = x$)?

(c) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine Orthogonalmatrix U, so dass gilt: $U^\top A U = D$.

Hausaufgaben

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gesucht ist die Matrix A mit den Eigenwerten 1 und 4 und den zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.

(b) Geben Sie eine geometrische Interpretation für die lineare Abbildung, die durch A beschrieben wird.

(c) Bestimmen Sie A^4 unter Ausnutzung des Ergebnisses von (b).

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Ist die Matrix diagonalisierbar (d.h. existiert VDV^{-1})? Falls ja, wie würde dann eine Transformationsmatrix V lauten?

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn kein Eigenwert gleich 0 ist.

(b) Das charakteristische Polynom einer 2×2-Matrix lässt sich schreiben als

$$\lambda^2 - \mathrm{spur}(A)\lambda + \det(A).$$

(c) A symmetrisch $\Rightarrow$ alle Eigenwerte sind reell. Gilt die Umkehrung?