Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2020

Matthias Grajewski, Andreas Kleefeld, Benno Wienke — Köln, Jülich, Aachen

Übungsblatt 11 — 08.06.2020

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die QR-Zerlegung zu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2

Bei welchen Werten a, b hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(a) zwei verschiedene reelle Eigenwerte?

(b) einen (doppelten) reellen Eigenwert?

(c) keinen reellen Eigenwert?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie auch eventuelle komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Ein komplexes Gleichungssystem können Sie wie ein reelles Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen.

Aufgabe 4

Wie lautet die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} ?$$

Lösen Sie anschließend mit dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (1, 2)^\top$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & & & . & & . \\ . & & & & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Wie lautet die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \, ?$$

Lösen Sie anschließend mit dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (2,3)^\top$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Gegeben sind

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & -1-t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_t = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix} \, , \qquad t \in \mathbb{R} \, .$$

Zeigen Sie, dass der Vektor x_t Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? Bestimmen Sie auch den zweiten Eigenwert.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \, .$$