Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2019/2020

Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 15 22./23.01.2020

1. Die Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^4$. Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. dieser Basis an.

2. Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ an, die senkrecht auf dem Vektor $\vec{a} = (-2, 1, 2, -3)$ stehen. Orthonormieren Sie die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.

3. Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   a) Bestimmen Sie aus V eine Orthonormalbasis von U, falls dies möglich ist.
   b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^\perp$?

4. Geben Sie eine orthonormale Basis des Unterraums W von $\mathbb{C}^3$ an, der durch

$$v_1 = (1; i; 0)^T \quad \text{und} \quad v_2 = (1; 2; 1 - i)^T$$

aufgespannt wird. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.

Hinweis: $< z, w >= z \cdot \bar{w}$

5. Es sei $B = \{1, x, x^3\}$ Basis des Unterraums $U \subset P_3$. Orthonormalisieren Sie mit dem Verfahren von Gram-Schmidt. Verwenden Sie folgendes Skalarprodukt:

$$< p, q >= \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$$

Geben sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.