

**Übungsblatt 14**

**15./16.01.2020**

**Präsenzaufgaben**

1. Berechnen Sie die Standardnorm der folgenden 2 Vektoren des Vektorraums  $P_2$  der Polynome vom Grad  $\leq 2$  bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

- a)  $h_1(x) = 4x^2 + 6x + 3$   
 b)  $h_2(x) = -4x^2 + 10x + 2$

2. Gegeben sei ein Vektorraum  $V$  und eine Menge  $M$  von Vektoren aus  $V$ . Untersuchen Sie die Eigenschaften „Lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus  $M$ “, „ $M$  bildet eine Basis“, „ $M$  bildet ein Erzeugendensystem“ und „ $M$  bildet ein minimales Erzeugendensystem“:

- a) Welche Eigenschaften implizieren die jeweils anderen:

Eigenschaften	impliziert die Eigenschaft				
	lin. unabh.	Basis	ES	OGB	ONS
linear unabhängig					
Basis					
Erzeugendensystem (ES)					
Orthogonalbasis (OGB)					
Orthonormalsystem (ONS)					

- b) Finden Sie zu jeder der obigen Eigenschaften ein einfaches Beispiel, das nur die Eigenschaft selbst und die damit implizierten Eigenschaften erfüllt, alle anderen jedoch nicht.

3. Es sei  $W$  der Unterraum des  $\mathbb{R}^5$ , der durch  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  aufgespannt

wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements  $W^\perp$  von  $W$  an.

4. Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängige Vektoren aus einem  $K$ -Vektorraum  $V$ . Außerdem sei  $x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$  und  $\mu_i \in K$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung  $\sum_{i=1}^n \mu_i \neq 1$  die Vektoren  $x - x_1, \dots, x - x_n$  linear unabhängig sind.

Tipp: Betrachten Sie dafür die Gleichung

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x - x_i)$$

## Hausaufgaben (freiwillig, keine Abgabe!)

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^3$  (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.

2. a) Zeigen Sie, dass mit dem Standardskalarprodukt die folgenden Vektoren jeweils eine Orthonormalbasis bilden

i.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

ii.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

- b) Zeigen Sie, dass jede Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  von der Form (1) oder (2) ist.

3. Gegeben Sei ein Vektorraum  $V$ .  $U$  und  $W$  seien Untervektorräume von  $V$ . Beweisen Sie folgende Aussagen:

a)  $U = (U^\perp)^\perp$

b)  $U \subset W \Rightarrow W^\perp \subset U^\perp$

c)  $W^\perp \subset U^\perp \Rightarrow U \subset W$

4. Sei  $W$  die lineare Hülle der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$W$  ist ein Teilraum des  $\mathbb{R}^3$ . Das orthogonale Komplement zu  $W$  ist  $W^\perp$ . Schreiben Sie

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

als Summe  $\vec{w} = (\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$  mit  $\vec{w}_1 \in W$  und  $\vec{w}_2 \in W^\perp$ .