Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 14 — 15./16.01.2020

Präsenzaufgaben

1. Berechnen Sie die Standardnorm der folgenden 2 Vektoren des Vektorraums P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx$$

   a) $h_1(x) = 4x^2 + 6x + 3$
   b) $h_2(x) = -4x^2 + 10x + 2$

2. Gegeben sei ein Vektorraum V und eine Menge M von Vektoren aus V. Untersuchen Sie die Eigenschaften „Lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus M“, „M bildet eine Basis“, „M bildet ein Erzeugendensystem“ und „M bildet ein minimales Erzeugendensystem“:

   a) Welche Eigenschaften implizieren die jeweils anderen:

	impliziert die Eigenschaft				
Eigenschaften	lin. unabh.	Basis	ES	OGB	ONS
linear unabhängig					
Basis					
Erzeugendensystem (ES)					
Orthogonalbasis (OGB)					
Orthonormalsystem (ONS)					

   b) Finden Sie zu jeder der obigen Eigenschaften ein einfaches Beispiel, das nur die Eigenschaft selbst und die damit implizierten Eigenschaften erfüllt, alle anderen jedoch nicht.

3. Es sei W der Unterraum des $\mathbb{R}^5$, der durch $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^{\perp}$ von W an.

4. Seien $x_1, ...x_n$ linear unabhängige Vektoren aus einem K-Vektorraum V. Außerdem sei $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$ und $\mu_i \in K$ für alle $i = 1, ..., n$.

   Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq 1$ die Vektoren $x - x_1, ..., x - x_n$ linear unabhängig sind.

   Tipp: Betrachten Sie dafür die Gleichung

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x - x_i)$$

   .

Hausaufgaben (freiwillig, keine Abgabe!)

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.

2. a) Zeigen Sie, dass mit dem Standardskalarprodukt die folgenden Vektoren jeweils eine Orthonormalbasis bilden

      i.
$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

      ii.
$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} sin(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

   b) Zeigen Sie, dass jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ von der Form (1) oder (2) ist.

3. Gegeben Sei ein Vektorraum V. U und W seien Untervektorräume von V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   a) $U = (U^\perp)^\perp$
   b) $U \subset W \Rightarrow W^\perp \subset U^\perp$
   c) $W^\perp \subset U^\perp \Rightarrow U \subset W$

4. Sei W die lineare Hülle der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. Das orthogonale Komplement zu W ist $W^\perp$. Schreiben Sie

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   als Summe $\vec{w} = (\vec{w_1} + \vec{w_2})$ mit $\vec{w_1} \in W$ und $\vec{w_2} \in W^\perp$.