FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 1, WS 2013/2014, am 20.09.2013

Name: ________________

Vorname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Unterschrift: ________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(12)
Aufgabe 6)		(12)
Aufgabe 7)		(12)
Aufgabe 8)		(16)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

- genau eine Lösung,
- keine Lösung oder
- unendlich viele Lösungen?

Ergebnis: Für $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gibt es eine eindeutige Lösung. Für $a = 0$ und $b \neq 0$ gibt es keine Lösung. Für $a = 0$ und $b = 0$ gibt es unendlich viele Lösungen.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems für $a = 3$ und $b = -9$.

Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Menge von Vektoren linear unabhängig sind und ob sie eine Basis des angegebenen Vektorraums bilden.

a)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Vektorraum} \quad \mathbb{R}^2$$

Ergebnis: linear abhängig. Vektoren bilden keine Basis im $\mathbb{R}^2$

b)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Vektorraum} \quad \mathbb{R}^3$$

Ergebnis: linear unabhängig. Vektoren bilden Basis im $\mathbb{R}^3$

c)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Vektorraum} \quad \mathbb{R}^3$$

Ergebnis: linear unabhängig. Vektoren bilden jedoch keine Basis im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

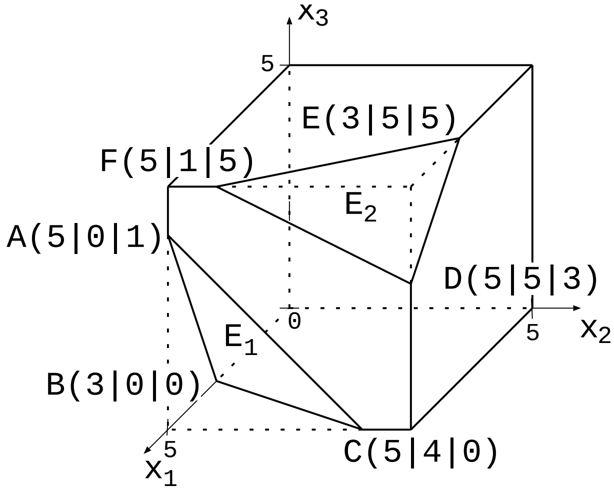
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass gilt:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\ k \in \mathbb{N}$$

Kein Ergebnis anzugeben!

Aufgabe 4

Bei dem folgenden Würfel wurden zwei Ecken abgeschnitten. Die Schnittflächen legen zwei Ebenen fest.



a) Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Mögliches Ergebnis: $g_s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ \frac{-7}{2} \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Wie ist der Abstand dieser Schnittgerade zum Nullpunkt?

Ergebnis: $d = \frac{1}{82}\sqrt{949,765} \approx 11,88$

Aufgabe 5

Die Menge der quadratischen Matrizen mit reellen Koeffizienten $\mathbb{R}^{n\times n}$ bildet einen Vektorraum bzgl. der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar.
Sei nun $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Menge von quadratischen Matrizen und

$$V = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n\times n} | AX = XA,\ \forall A \in M \right\}.$$

a) Wie lautet die Definition eines Untervektorraumes?

Kein Ergebnis anzugeben!

b) Zeigen Sie: V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Kein Ergebnis anzugeben!

Aufgabe 6

Ein Wanderer auf der Sophienhöhe lässt sich zur Mittagspause auf einer Bank nieder. Von dort hat er einen wunderbaren Überblick über Jülich. Nach ein paar Minuten beobachtet er am Himmel ein AWACS Flugzeug und ein Verkehrsflugzeug. Er bekommt einen Schrecken, weil es für ihn so ausschaut, als ob das Verkehrsflugzeug genau auf die Flugbahn der AWACS Maschine zusteuert.
Im Nachhinein lässt sich feststellen, dass das Verkehrsflugzeug die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 28 \\ -20 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 25 \\ -18 \\ 14 \end{pmatrix}$$

durchflogen hat. Der Tower in Geilenkirchen kennt einen Punkt der AWACS Flugbahn $(1, 3, 40)^T$ und die geradlinige Richtung der Flugbahn $(3, 4, 0)^T$.
Untersuchen Sie, ob der Wanderer Grund zur Besorgnis hatte, indem Sie bestimmen, wie nah sich die beiden Flugzeuge auf ihren Flugbahnen tatsächlich minimal gekommen sein können.

Ergebnis: $d = \frac{3}{\sqrt{61}} \approx 0,3841$

Aufgabe 7

Sei V ein Vektorraum und $v \in V$ ein fest gewähltes Element. Wir betrachten die Translation (Verschiebung) φ_v eines Vektors um v, also $\varphi_v(x) = x + v, x \in V$.

a) i) Sei M eine nichtleere Menge, zwischen deren Elementen eine Verknüpfung „$\circ$“ definiert ist. Nennen Sie die Bedingungen unter denen das Paar $(M, \circ)$ eine Gruppe bildet.

ii) Zeigen Sie: Die Menge $G = \{\varphi_v, v \in V\}$ bildet bzgl. der Verkettung (Hintereinanderausführung) $\circ$ eine Gruppe.

b) i) Sei W ein beliebiger Vektorraum und $g : W \to W$ eine beliebige Abbildung. Welche Bedingungen muss g erfüllen, damit g eine lineare Abbildung ist?

ii) Sei $v \neq 0$ fest. Beweisen oder widerlegen Sie: φ_v ist eine lineare Abbildung auf V.

Keine Ergebnisse anzugeben!

Aufgabe 8

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ heißen orthogonal, wenn $\vec{b}^T \cdot \vec{a} = 0$ gilt.
2			Neben dem Assoziativgesetz gilt in Gruppen immer das Kommutativgesetz. Hinweis: Betrachten Sie dazu die folgenden zwei Gruppen: $a \oplus b = a + b$ auf $\mathbb{Z}$ und $A \odot B = A \cdot B$ auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$
3			Dreiecksmatrizen können symmetrisch sein.
4			Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ haben immer den Abstand 0 zueinander.

Keine Ergebnisse anzugeben!