Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 12 — 18./19.12.2019

Präsenzaufgaben

1. a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   b) Weiter sind die folgenden Vektoren $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ gegeben:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Tauschen Sie jeden der 3 Vektoren aus des Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ so gegen einen Vektor aus der Menge $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ aus, dass wieder eine Basis im $\mathbb{R}^3$ entsteht.

   Hinweis: Dabei soll jeweils aus der Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ genau ein Vektor ausgetauscht werden.

2. $M = \{f, g, h, i\}$ sei eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum V mit $dim(V) \geq 4$. Wie muss α gewählt werden, damit $\{f + g, g + h, h + i, i + \alpha \cdot f\}$ linear unabhängig sind?

3. Gegeben sei $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in P_3$. Berechnen Sie die Koordinaten des Polynoms $p(x)$ bezüglich der Basis $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

4. Geben seien vier Punkte in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1, \alpha - 2);\ (-1, 2 - \alpha);\ (-2; 25 - 8\alpha);\ (\frac{1}{2}; \frac{\alpha - 5}{8})$$

   Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α ein Interpolationspolynom möglichst geringen Grades. Geben Sie den Grad des Polynoms in Abhängigkeit von α an.

Hausaufgaben (Abgabe bis 07.01.2020)

1. Bestimmen Sie $dim(L(a, b, c))$ in Abhängigkeit von $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Es sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis eines zweidimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraums V. Man untersuche, für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ auch die beiden Vektoren $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ eine Basis von V bilden.

3. Gesucht sind die Koordinaten des Polynoms v bzgl. der Basis $\mathcal{B} = \{2x + 2, -1\}$. Die Koordinaten bzgl. der Basis $\mathcal{C} = \{3x + 4, 4x + 3\}$ seien $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(v) = \left(-1, 2\right)^T$.

4. Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom möglichst niedrigen Grades, das an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A = (-2/3), \quad B = (-1/2), \quad C = (2/5).$$

   Stellen Sie das Polynom auch in seiner Faktorzerlegung dar.