Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 10 04./05.12.2019

Präsenzaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen keine Vektorräume über $\mathbb{R}$ bilden.

   a) $V = \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und
   $\lambda \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

   b) $V = \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und
   $\lambda \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$ mit der Addition und skalaren Multiplikation des $\mathbb{R}^n$.

2. Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind:

   a) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$
   b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2\}$
   c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$

3. Für welche x spannen die folgenden Vektoren den $\mathbb{R}^3$ auf und für welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$$

4. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren in $C[-\infty, \infty]$ linear unabhängig sind:

   a) $f_1(x) = 6, \quad f_2(x) = 3 \cdot \sin x, \quad f_3(x) = 2 \cdot \cos x$
   b) $f_1(x) = (3 - x)^2, \quad f_2(x) = x^2 + 6x, \quad f_3(x) = 5$
   c) $f_1(x) = e^{2x}, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x$

Hausaufgaben (Abgabe bis 10.12.2019)

1. Bilden die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen Vektorräume?

   a) $M = \{a\}$ mit $a + a = a$ und $ka = a$

   b) $M = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\}$

      i. mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}, k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

      ii. mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}, k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2kx_1 \\ 2ky_1 \\ 2kz_1 \end{pmatrix}$

      iii. mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix}$

   c) $M = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$ mit der Vektoraddition, Multiplikation mit Skalar

   d) $M = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{pmatrix}$, $k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$

2. Es sei bekannt, dass $\mathcal{C}[a,b]$ einen Vektorraum wie in der Vorlesung beschrieben bildet. Bilden die folgenden Mengen Untervektorräume? $a \neq b$ und $a, b \neq 0$;

   a) $U_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}[a,b] \middle| \int_a^b f(x)dx = 0 \right\}$

   b) $U_2 = \{f \in \mathcal{C}[a,b] | f(a) \cdot f(b) = 0\}$

3. Bestimmen Sie a so, dass die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ linear unabhängig (komplanar) sind.

4. Sind folgende Funktionsmengen auf dem Intervall $[-2; 2]$ linear unabhängig?

$$M_1 = \{\sinh(x), e^x, e^{2-x}\} \qquad M_2 = \{\sinh(x), e^x, e^{-2x}\}$$