Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 8 — 20./21.11.2019

Präsenzaufgaben

1. a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punkts $P = (1; 8; 9)$ zur Ebene

$$E : -x + 2y + 2z = -3$$

   b) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $P = (-1; 1; 2)$ zur Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Zeigen Sie, dass die folgenden 3 Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben. Bestimmen Sie anschließend die Schnittmenge.

$$E_1 : x + z = 4, \qquad E_2 : 3x - 2y + 2z = 1, \qquad E_3 : 2y + z = 11$$

3. Zeigen Sie im $\mathbb{R}^3$ durch Rückführung auf das Spatprodukt und (gegebenenfalls) komponentenweises Ausmultiplizieren:

   a) **D1**. $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$

   b) **D2**. $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$

   c) **D3**. $\det(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0$

4. Bei welchem der folgenden Systeme handelt es sich um eine Gruppe?

   a) G ist die Menge der von 1 verschiedenen reellen Zahlen mit der Verknüpfung $x \circ y := x + y - xy$.
   Tipp: Überprüfen Sie für die Abgeschlossenheit, wann $x \circ y = 1$ gilt.

   b) G ist die Menge der von 0 verschiedenen rationalen Zahlen mit der Division als Verknüpfung.

Hausaufgaben (Abgabe bis 26.11.2019)

1. Gegeben sei die folgende Ebene in Parameterdarstellung

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   a) Stellen Sie die Hesse-Normalform zu dieser Ebene auf.

   b) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung, sowie den Abstand des Punktes $P = (2;2;2)$ zur Ebene.

2. Vereinfachen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten so weit wie möglich:

   a) $\det(\alpha\vec{a}, \alpha\vec{b}, \alpha\vec{c})$

   b) $\det(\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c})$

   c) $\det(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{c})$

3. Auf der Menge der Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist die folgende Abbildung definiert:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

   a) Hat diese Verknüpfung ein neutrales Element?

   b) Für welche Elemente $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ hat diese Verknüpfung ein inverses Element?

   c) Gibt es eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$, die bzgl. dieser Verknüpfung eine (evtl. nicht kommutative) Gruppe bildet?