Benno Wienke, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 6 — 06./07.11.2019

Präsenzaufgaben

1. Berechnen Sie zu den folgenden Ebenengleichungen im $\mathbb{R}^3$ die jeweils anderen Darstellungsformen (Punkt-Richtungsform, Normalform, Hessesche Normalform)

   a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $E_2 : 2x_1 + x_2 = 7$

   c) $E_3 : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1$

   d) Ebene E_4 durch die Punkte $P = (1; 2; 3)$, $Q = (1; 3; 2)$ und $R = (0; 2; 1)$

   e) $E_5 : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 4$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. a) Stellen Sie die Hyperebene $< n, x >= -1$ im Raum $\mathbb{R}^4$ mit

   $$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   in Parameterform dar.

   b) Stellen Sie die Hyperebene im Raum $\mathbb{R}^4$

   $$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   in Normalform dar.

3. Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

   $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   parallel zur Ebene

   $$E : 2x - y + t \cdot z = 9, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

4. Gegeben sei die Ebene E im $\mathbb{R}^3$

$$E = 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

Bestimmen Sie:

a) eine Ebene E_a, die senkrecht zu E verläuft. Die Schnittmenge von E und E_a beinhaltet den Punkt $(1, -1, 4)$

b) einen Normalenvektor der Ebene E_c, sodass E_c und E sich im Winkel von $\frac{\pi}{3}$ schneiden.

Geben Sie ihren Rechenweg an oder validieren Sie ihr Ergebnis.

Hausaufgaben (Abgabe bis 12.11.2019)

1. Untersuchen Sie jeweils, ob folgende Ebenen- bzw. Geradengleichungen dieselben Ebenen bzw. Geraden beschreiben:

   a)
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   b)
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 2x + 2y - 2z = 2$$

   c)
   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -t_2 x + t_1 y = 0$$

2. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen

   a) $3x + 4z = 7$ und $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $-6x - 6y - 3z = 1$

3. **Typische IHK-Aufgabe.** Eine Mobilfunkantenne muss wegen der stürmischen Lage auf einem Berg mit Seilen stabilisiert werden. Die Spitze der Antenne hat die Koordinaten

   $$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

   Die Seile werden an den Punkten

   $$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   befestigt.

   a) Berechnen Sie die Ebene, in der die Punkte A, B, C liegen, in Hessescher Normalform.

   b) Der Fuß der Mobilfunkantenne liegt in der gleichen Ebene wie die Endpunkte der Seile. Die Antenne steht genau in z-Richtung. Bestimmen Sie die Höhe der Antenne (1 LE $= 10$ m).