Beweismethoden

Aufgabe 1

Man beweise: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{j} = \binom{n}{j} \cdot \binom{n-j}{k},\ 0 \leq j, k \leq n.$

Aufgabe 2

Man beweise durch vollständige Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$
Beweisen Sie diese Aussage.

b) $n^3 + 2n$ ist für alle natürlichenZahlen n durch 3 teilbar

c) $k! \geq \frac{1}{2} \cdot 2^k \quad, \forall k \geq 1.$

d) Finden Sie ein $n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:
$1 + 2n^2 < n^3$. Beweisen Sie diese Aussage.

e) $\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k \quad , n \in \mathbb{N}_0$

f) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar $(n \geq 1)$

Aufgabe 3

Stimmt die Behauptung $(1 + 2 + \ldots + 9 + 10)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots 9^3 + 10^3$?
Beweisen Sie die Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion für n Summanden
(Wird auch oft in Aufgabenstellungen mit dem Wort „Allgemeingültigkeit“ bezeichnet.)

Aufgabe 4

Es gelte $M(1) = 1$ und $M(n+1) = M(n) + 8n$ für beliebige natürliche Zahlen n.
Berechnen Sie die ersten vier Glieder, raten Sie eine geschlossene Darstellung für M und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe 5

In einem Programm werden die Werte einer Folge mit dem Startwert $a_1 = 1$ gemäß der Vorschrift $a_k = (1 + \frac{1}{k}) \cdot a_{k-1}$ in einer Schleife über $k = 2$ bis n berechnet.
Folgende n Werte der rekursiven Folge werden somit bestimmt:

k	1	2	3	4	$\ldots$	n
a_k	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\ldots$	$(1 + \frac{1}{n}) \cdot a_{n-1}$

a) Welcher Wert ergibt sich für a_{10} ?

b) Ihr Gruppenleiter behauptet, dass Sie die Berechnung durch $a_n = \frac{n+1}{2}$ ersetzen können und damit viel Rechenzeit sparen.
Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion), dass Ihr Chef recht hat.

(Hinweis: Die rekursive Formel aus der Aufgabenstellung muss neben der Induktionsvoraussetzung (IV) ebenfalls im Induktionsschluss (IS) verwendet werden.)

c) Welche Formel ergibt sich, wenn Sie als ersten Index die 0, also Startwert $a_0 = 1$, wählen?
Der Index der Folgenglieder läuft dann von $k = 0$ bis $n - 1$.
(Hinweis: Berechne zunächst ein paar a_n und entwickeln daraus die gesuchte Formel.)

Anmerkung:
In der Mathematik ist folgende Schreibweise für diese rekursive Folge üblich:
$a_0 = 1, a_{k+1} = (1 + \frac{1}{k+1}) \cdot a_k, k = 1 \ldots n - 1)$