

Übungsblatt 13

17./18.06.2019

Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie nun mit Hilfe der berechneten Eigenwerte die Determinante von A.

3.) Geben Sie eine Matrix zu folgendem charakteristischen Polynom an:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$$

4.) Zeigen Sie:

- (a) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn kein Eigenwert gleich 0 ist.
- (b) Das charakteristische Polynom einer 2×2 -Matrix lässt sich schreiben als

$$\lambda^2 - \text{spur}(A)\lambda + \det(A).$$

- (c) A symmetrisch \Rightarrow alle Eigenwerte sind reell. Gilt die Umkehrung?

Hausaufgaben (Abgabe bis 23.06.2019)

5.) Bei welchen Werten a, b hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

- (a) zwei verschiedene reelle Eigenwerte?
- (b) einen (doppelten) reellen Eigenwert?
- (c) keinen reellen Eigenwert?

(je 3 Punkte)

6.) Eine Abbildung im \mathbb{R}^2 ist wie folgt definiert:

Ein gegebener Vektor \vec{x} wird zuerst um 90° im Uhrzeigersinn gedreht und anschließend an der y -Achse gespiegelt.

- (a) Welcher Vektor wird auf sich selbst abgebildet?
- (b) Die Abbildung welchen Vektors zeigt genau in die entgegengesetzte Richtung?
- (c) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A auf.
- (d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A . Passen diese zu den Beobachtungen aus a) und b)?

(je 3 Punkte)

7.) In einem Land haben bei der letzten Wahl 50% der Wähler Partei A , 30% Partei B und 20% Partei C gewählt. Aus der Wahlforschung ergibt sich, dass je 10% der A -Wähler nun B und C wählen, 10% der B -Wähler A und 20% C wählen und nur die Hälfte der C -Wähler treu sind, aber 30% B wählen wollen.

- (a) Stellen Sie die Übergangsmatrix auf.
- (b) Ermitteln Sie die Prozentwerte bei der nächsten Wahl.
- (c) Auf welche stationäre Verteilung würde sich das Wahlergebnis einpendeln, wenn der Trend bei jeder Wahl gleich bliebe? (Berechnung mit Hilfe von Eigenwerten/-vektoren!)

(je 3 Punkte)