Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2019

Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 7 06./07.05.2019

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben sei

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

B sei die im Uhrzeigersinn um 45° gedrehte Basis

(a) Bestimmen Sie die Basisvektoren von B.

(b) Berechnen Sie jeweils die Koordinaten des Vektors x mit $K_E(x) = (4,5)^T$ bezüglich der Basen A und B.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen, die die Koordinaten bezüglich A in Koordinaten bezüglich B umrechnen beziehungsweise umgekehrt. Verifizieren Sie die Richtigkeit mit Hilfe des Beispiels aus b).

2.) Gegeben seien folgende Basen

$$A = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$B = \left\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für die durch $F(\vec{a_1}) = 2\vec{b_1} + \vec{b_2}$, $F(\vec{a_2}) = \vec{b_1}$, $F(\vec{a_3}) = \vec{b_3}$ gegebene lineare Abbildung bestimmen Sie die folgenden Abbildungsmatrizen:

(a) bzgl. der Basen A (Definitionsbereich) und B (Wertebereich)

(b) bzgl. der Basis A im Definitions- und Wertebereich

(c) bzgl. der kanonischen Basis im Definitions- und Wertebereich

3.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Bestimmen Sie Elementarmatrizen M_1 und M_2 mit $M_1 M_2 A = E$.

(b) Stellen Sie A^{-1} als Produkt zweier Elementarmatrizen dar.

(c) Schreiben Sie A als Produkt von zwei Elementarmatrizen.

Hausaufgaben (Abgabe bis 12.05.2019)

4.) (a) Stellen Sie die Abbildungsmatrix bzgl. der kanonischen Basis E (im Definitions- und Wertebereich) auf, welche einen gegeben Punkt im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $90°$ dreht.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix, die Koordinaten bzgl. der Basis E in Koordinaten bzgl. der Basis B transformiert. Dabei ist die Basis B die um $45°$ gedrehte Basis.

(c) Bestimmen Sie im Anschluss die Abbildungsmatrix zu der Abbildung aus a) bzgl. der Basis B im Definitions- und Wertebereich.

(je 3 Punkte)

5.) Der Konzern MATSE Chemicals stellt seine Umsätze aus den Sparten Kunststoffe, Petrochemie und Organische Chemie mit Hilfe des Vektors $x = (x_K, x_P, x_O)^T$ dar. Der Vektor $y = (y_E, y_A)^T$ gibt die Einnahmen und Ausgaben des Gesamtkonzern in Mio. EUR wieder und berechnet sich nach derzeitigem Stand wie folgt:

- Die Einnahmen ergeben sich als Summe der Umsätze der einzelnen Sparten.
- Die Ausgaben belaufen sich auf 95% der Umsätze aus dem Kunststoffbereich plus 90% der Umsätze aus dem Bereich Petrochemie plus 85% der Umsätze aus dem Bereich der Organischen Chemie.

(a) Stellen Sie den Vektor y als Lineare Abbildung des Vektors x dar, indem Sie die zugehörige Abbildungsmatrix M_y^x aufstellen.

Die Sparte Petrochemie soll nun aufgelöst werden und zu 80% in die Sparte Kunststoffe sowie 20% in Organische Chemie eingegliedert werden.

(b) Stellen Sie die Umsätze $x' = (x'_K, x'_O)^T$ der Sparten Kunststoffe und Organische Chemie nach Umgliederung des Konzerns allgemein dar, indem Sie die Transformationsmatrix $T_{x'}^x$ für die Transformation von x nach x' berechnen.

(c) Begründen Sie inhaltlich sowie mathematisch, warum Sie die Abbildungsmatrix $M_y^{x'}$ zur Bestimmung der Einnahmen und Ausgaben nach der neuen Konzernstruktur nicht allgemein aufstellen können.

(d) Geben Sie ein sinnvolles Beispiel an, wie $M_y^{x'}$ aussehen könnte.

(je 3 Punkte)

6.) Welche der folgenden Matrizen sind Elementarmatrizen? Geben Sie die Zeilenoperationen an, die einer Multiplikation von links mit den folgenden Matrizen entsprechen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(je 3 Punkte)