Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

# Übungsblatt 4 15./16.04.2019

## Präsenzaufgaben

1.) Bestimmen Sie das Bild, den Rang, den Kern und die Dimension des Kerns der Abbildung $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}, f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixprodukte $AB, BA, A^TB, B^TA, A^TA, AA^T$, falls sie existieren. Welche der Matrixprodukte existieren auf jeden Fall, unabhängig von der Zeilen- und Spaltenzahl von A? Begründen Sie Ihre Aussagen.

3.) Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von $a$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$$

4.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

wobei $i$ die imagiäre Einheit ist. Stellen Sie eine Behauptung für $A^n$ auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

**Hausaufgaben (Abgabe bis 21.04.2019)**

4.) Bestimmen Sie

(a) den Kern

(b) die Dimension des Kerns

(c) den Rang

(d) das Bild

der Abbildung $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}, f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*(je 3 Punkte)*

5.) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Matrixprodukte sind wohldefiniert

(a) $A \cdot B$ (b) $C \cdot B$ (c) $A \cdot C$ (d) $A \cdot B \cdot C$
(e) $A \cdot C \cdot B$ (f) $C \cdot B \cdot A$

Begründen Sie Ihre Aussagen und bestimmen Sie gegebenenfalls das Produkt der Matrizen.

*(je 3 Punkte)*

6.) Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten die *Projektion* $p$ von $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung $v$ (vgl. Lineare Algebra 1). Es gilt $p = \frac{\langle v,x \rangle}{||v||^2} v$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und $|| \cdot ||$ die euklidische Norm bezeichne.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P(x) = p$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix $A$.

(c) Berechnen Sie Bild$(P)$ und geben Sie eine Basis des Bildes an. Vermeiden Sie dabei umfangreiche Rechnungen! Wie lautet rg$(A)$?

(d) Bestimmen Sie Ker$(P)$ und deuten Sie Ker$(P)$ geometrisch.

(e) Geben Sie eine Basis von ker$(P)$ an! Tipp: Erinnern Sie sich an die Umrechnung der verschiedenen Ebenendarstellungen ineinander!

(f) Zeigen Sie, das $P$ keine Umkehrabbildung besitzt.

*(je 3 Punkte)*