Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 3 08./09.04.2019

Präsenzaufgaben

1.) **Matrix-Vektor-Multiplikation**
Voraussetzung: Die Spaltenzahl der Matrix und die Zahl der Komponenten des Vektors müssen übereinstimmen.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gegeben sind die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

und die Vektoren

$$y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad z = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Matrix-Vektor-Produkte sind wohldefiniert?

(a) $B \cdot y$ (b) $B \cdot z$ (c) $C \cdot y$ (d) $C \cdot z$
(e) $D \cdot y$ (f) $D \cdot z$

Begründen Sie Ihre Aussagen und bestimmen Sie gegebenenfalls das Produkt.

2.) Prüfen Sie die folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ auf Linearität. Gehen Sie dabei wie in Bemerkung 4.41 beschrieben vor.

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ (b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.) Sei

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -3x + z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

(b) Bestimmen Sie Kern von F und seine Dimension.

(c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimmen Sie $dim(Bild(F))$.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

4.) Für eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sind folgende Einzelabbildungen bekannt:

$$\begin{aligned} \Phi((1,0,0)^T) &= (-1,0)^T \\ \Phi((-1,0,1)^T) &= (3,1)^T \\ \Phi((0,2,-1)^T) &= (-2,1)^T \\ \Phi((0,2,0)^T) &= (0,2)^T \end{aligned}$$

(a) Wie viele der obigen vier Angaben benötigen Sie zur Bestimmung der Abbildungsmatrix?

(b) Bestimmen Sie mit ausreichend vielen dieser Angaben die zugehörige Abbildungsmatrix

(c) Überprüfen Sie ggf., ob alle vier Angaben konsistent sind.

Hausaufgaben (Abgabe bis 14.04.2019)

5.) Prüfen Sie die folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ auf Linearität. Gehen Sie dabei wie in Bemerkung 4.41 beschrieben vor.

(a) $f_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (b) $f_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$

(je 3 Punkte)

6.) Drehungen sind lineare Abbildungen. Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Schritte die Abbildungsmatrix A_ϕ zu der linearen Abbildung f_ϕ, die einen Vektor innerhalb des $\mathbb{R}^3$ um einen Winkel ϕ um die x-Achse dreht.

(a) Bestimmen Sie für

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_{\pi/6}(\vec{v}_1)$, $f_{\pi/6}(\vec{v}_2)$ und $f_{\pi/6}(\vec{v}_3)$, also die um $\frac{\pi}{6}$ gedrehten kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$.

(b) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix $A_{\pi/6}$ zu $f_{\pi/6}$ auf.

(c) Bestimmen Sie für

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_\phi(\vec{v}_1)$, $f_\phi(\vec{v}_2)$ und $f_\phi(\vec{v}_3)$, also die um einen beliebigen Winkel ϕ gedrehten kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$.

(d) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix A_ϕ zu f_ϕ auf.

(je 3 Punkte)

7.) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f(A) = A^T$ bildet eine 2×2-Matrix auf ihre transponierte Matrix ab.

(a) Bestimmen Sie die Bilder der Standardmatrizen des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Bestimmen aus den Bildern der Standardmatrizen die Abbildungsmatrix M.

(je 3 Punkte)