**Aufgaben zur Veranstaltung**
**Lineare Algebra 2, SS 2019**

Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Svenja Schmidt FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

# Übungsblatt 2 01./02.04.2019

## Präsenzaufgaben

1.) Sind die folgenden Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

(a) Es ex. eine Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $f$ ist ein Isomorphismus.

(b) Eine Abbildung ist genau dann linear, wenn sie bijektiv ist.

(c) Die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}$ ist ein Automorphismus.

(d) Es ex. eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $dim(Kern(f)) = 2$ und $rang(f) = 3$.

2.) Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Geben Sie gegebenenfalls die zugehörige Matrix an. Bestimmen Sie jeweils den Kern (auch für die nicht linearen Abbildungen).

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $f_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$

(d) $f_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

3.) Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ einen Isomorphismus darstellt:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ y \\ x + z \end{pmatrix}.$$

4.) Stellen Sie die Abbildungsmatrix zur Abbildung $f: P_2 \to P_3$ mit $f(p(x)) = p(x) \cdot x$ auf. Benutzen Sie dabei sowohl im Definitions- als auch im Wertebereich die Basis der Monome, also $\{1, x, x^2\}$ bzw. $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Beispiel als Hinweis:

$$p(x) = x^2 - 2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad f(p(x)) = x^3 - 2x = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und somit

$$p = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Hausaufgaben (Abgabe bis 07.04.2019)**

4.) Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$

(a) Zeigen Sie: f ist linear.

(b) Bestimmen Sie den Kern($f$) und geben Sie die $dim(Ker(f))$ an.

(c) Berechnen Sie die $dim(Bild(f))$ bzw. $rg(f)$ und bestimmen Sie das $Bild(f)$.

(d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?

*(je 3 Punkte)*

5.) Es sei $P^n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und

$$f : \begin{cases} P^n \to P^{n-1} & : n \in \mathbb{N} \\ P^0 \to P^0 & : n = 0, \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f für die Differentiation $f(p) = p'$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Untersuchen Sie die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Wie sieht das Bild und der Kern dieser Abbildung aus?

*(je 3 Punkte)*

6.) Ein lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ ein Isomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}(x, y, z)$.

*(je 3 Punkte)*