Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

# Übungsblatt 14 — 16.1.2019

## Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie die Standardnorm der folgenden 2 Vektoren des Vektorraums $P_2$ der Polynome vom Grad $\leq 2$ bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx$$

(a) $h_1(x) = 4x^2 + 6x + 3$

(b) $h_2(x) = -4x^2 + 10x + 2$

2.) Es sei $W$ der Unterraum des $\mathbb{R}^5$, der durch $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an.

3.) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $< \cdot, \cdot >$ ein Skalarprodukt mit zugehöriger Norm $|| \cdot ||$. Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen gelten.

(a)

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

(b) Es sei bekannt, dass $x \perp y$

$$||x||^2 + ||y||^2 = ||x - y||^2$$

4.) $x_1, ..., x_n$ seien linear unabhängige Vektoren aus einem $K$ Vektorraum $V$. Weiter sei $x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$ und $\mu_i \in K$ für alle $i = 1, ..., n$. Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^n \mu_1 \neq 1$ dann sind die Vektoren $x - x_1, ..., x - x_n$ linear unabhängig. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

Betrachten sie die Gleichung

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x - x_i) \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für alle $i = 1, ..., n$ gilt: $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\right) \mu_i = \lambda_i$

Folgern Sie daraus, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ gelten muss (Summe über alle $i$ bilden).

Zeigen Sie, dass aus $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ und der Gleichung 1 folgt, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

Zeigen Sie schließlich, dass die Vektoren linear unabhängig sein müssen.

**Hausaufgaben (freiwillig, keine Abgabe)**

5.) Beweisen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den gegebenen Abbildungen um eine Norm für Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ handelt.

(a)

$$||x|| = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(b)

$$||x|| = |\prod_{i=1}^{n} x_i|$$

(c)

$$||x|| = \min_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

6.) Gegeben seien die Vektoren $x_1, ..., x_m$ eines $K$ Vektorraums $V$. Weiter seien $y_1, ..., y_m$ definiert durch

$$y_i = \sum_{j=1}^{i} x_i$$

. Daraus folgt, dass $y_1 = x_1$ und für $j = 2, ..., m$ $x_j = y_j - y_{j-1}$ Zeigen Sie:

$$L(x_1, ..., x_m) \subseteq L(y_1, ..., y_m)$$

7.) Betrachten Sie $C[0, \pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)\, dx$$

und $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Zeigen Sie, dass $f_k$ und $f_l$ für $k \neq l$ orthogonal sind.

*Hinweis:*

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \dfrac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}; & |a| \neq |b| \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4a}\sin(2ax) & ; \quad a = b \end{cases}$$