Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2018/2019

Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 13 — 9.1.2019

Präsenzaufgaben

1.) Sind die Polynome

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 7$$
$$f_2(x) = -3x^2 + x + 4$$
$$f_3(x) = -6x^2 + 13x - 5$$

linear unabhängig?

2.) Zeigen Sie, dass durch $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_3 - u_3v_2 + u_4v_4$ für

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

kein Skalarprodukt definiert wird

3.) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom möglichst niedrigen Grades, das an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A = (-2/3), \quad B = (-1/2), \quad C = (2/5).$$

Stellen Sie das Polynom auch in seiner Faktorzerlegung dar.

4.) $v_1, \dots, v_n$ mit $v_i \neq 0$ seien n paarweise orthogonale Vektoren, d.h.

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0 \qquad \forall\, i \neq j.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

Tipp: Klären Sie zunächst, was passiert, wenn man eine Linearkombination

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

skalar mit einem v_k für $1 \leq k \leq n$ multipliziert.

5.) p und q seien reelle Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{2} p(x_k) \cdot q(x_k)$$

wobei x_0, x_1, x_2 paarweise verschiedene reelle Zahlen sind, ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum P_2 der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 gegeben ist.

Beispiel: $p = 5x + 2$, $q = x^2 + 3$; wähle $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
$\Rightarrow \langle p, q \rangle = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 12 \cdot 7 = 118$

Hinweis: Zum Beweis von SP4 benötigen Sie die Bedingung, dass x_0, x_1 und x_2 paarweise verschieden sind.

Hausaufgaben (Abgabe bis 15.1.2019)

6.) Berechnen Sie das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

für folgende Vektoren aus dem P_3:

(a) $p(x) = 1 - x + x^2 + 5x^3$ und $q(x) = x - 3x^2$

(b) $p(x) = x - 5x^3$ und $q(x) = 2 + 8x^2$

(gesamt 3 Punkte)

7.) Gegeben sind drei Punkte in Abhängigkeit eines Parameters $\beta \in \mathbb{R}$.

$$(-2; \beta - 2), (-1; \beta - 1), (1, 1 + \beta)$$

(a) Bestimmen sie ein Interpolationspolynom $p(x)$ möglichst geringen Gerades in Abhängigkeit von β und geben Sie dieses an.

(b) Des weiteren seien folgende Polynome gegeben:

$$q(x) = -\beta x^2 + \beta$$
$$r(x) = -\beta x^2 + (\beta - 1)x$$

Sind die Polynome p,q und r linear Abhängig?

(jeweils 3 Punkte)

8.) Weisen sie nach, ob es sich bei den angegebenen Abbildungen $< x, y >: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um Skalarprodukte handelt?

(a) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_1$

(b) $< x, y >= \sum_{i=1}^{3} e^{x_iy_i}$

(c) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

(d) $< x, y >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

(gesamt 6 Punkte, jeweils 3 Punkte für a und b sowie für c und d)