Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2018/2019

Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 10 — 5.12.2018

Präsenzaufgaben

1.) Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Sind $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ linear unabhängig?

(b) Wie lautet das Ergebnis, wenn man $\vec{c}$ durch $\vec{d}$ ersetzt mit

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

(c) Sind die Vektoren $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{f}\}$ linear unabhängig mit

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}?$$

2.) Bildet die Menge $\mathbb{R}^3$ bzgl. der folgenden Verknüpfungen einen Vektorraum?

(a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \cdot x_1 \\ 2\alpha \cdot x_2 \\ 2\alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$

3.) Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind:

(a) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2\}$

(c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$

4.) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Auf der Menge M eine beliebige nicht leere Menge und $S = Abb(M; K)$ die Menge aller Abbildungen von M nach K. Zeigen Sie mit den Vektorraumaxiomen, dass $(S, +, \cdot)$ mit der Addition

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m)\ \forall m \in M,\ \ f, g \in S$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda \cdot g)(m) := \lambda \cdot g(m)\ \forall m \in M,\ \ \lambda \in K,\ \ g \in S$$

einen K-Vektorraum bildet.

5.) Gegeben Sei die Menge $M = \{0, 1, x\}$. Geben sie die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ mittels zweier Tabellen so an, dass $(M, +, \cdot)$ einen Körper bilden. 0 sei das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Zeige sie Assoziativität sowie Distributivität anhand eines Beispiels.

$+$	0	1	x
0			
1			
x			

$\cdot$	0	1	x
0			
1			
x			

Hausaufgaben (Abgabe bis 11.12.2018)

6.) Es sei bekannt, dass $\mathcal{C}[a,b]$ einen Vektorraum wie in der Vorlesung beschrieben bildet. Bilden die folgenden Mengen Untervektorräume? $a \neq b$ und $a, b \neq 0$;

(a) $U_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}[a,b] | \int_a^b f(x)dx = 0 \right\}$

(b) $U_2 = \{ f \in \mathcal{C}[a,b] | f(a) \cdot f(b) = 0 \}$

(jeweils 3 Punkte)

7.) Sind die folgenden Mengen an Vektoren linear unabhängig?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(jeweils 3 Punkte)

8.) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Auf der Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_0, a_1, \ldots)$ mit Elementen $a_i \in K, \forall i \in \mathbb{N}$, sei eine Addition

$$\oplus : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, ((a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}}) \longmapsto (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \oplus (b_i)_{i \in \mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

und eine Skalarmultiplikation

$$\circ : K \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, (k, (a_i)_{i \in \mathbb{N}}) \longmapsto k \circ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} := (k \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

definiert.

Zeigen Sie mit den Vektorraumaxiomen, dass $\mathcal{F}$ ein K-Vektorraum ist.

(3 Punkte)