Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 8 21.11.2018

Präsenzaufgaben

1.) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x - y + t \cdot z = 9, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie für diese Fälle jeweils den Abstand der Geraden von der Ebene E.

2.) Heinz wandert zu seinem Freund Jupp, der von ihm aus 10 km in Richtung $(3;4)$ wohnt. Er läuft in die richtige Richtung los, doch auf der Hälfte der Strecke schaut er auf seinen defekten Kompass und ändert seinen Weg in Richtung $(2;1)$. Da er sich unsicher ist, versucht er laufend das Haus von Jupp zu erspähen. Leider herrscht leichter Nebel und die Sichtweite beträgt nur 2 km. Wird Heinz das Haus von Jupp sehen oder läuft er an ihm vorbei? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) Gegeben sind die 2 Punkte $P = (1;2;3)$ und $Q = (-1;1;2)$ und die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Geraden g_1 bzw. g_2 durch den Punkt P in Richtung von $\vec{a}$ bzw. durch Q in Richtung von $\vec{b}$.

(b) Sind die Geraden windschief (d.h. sind sie weder parallel noch haben sie einen Schnittpunkt)?

(c) Falls das der Fall ist, bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf beiden Geraden steht. Bestimmen Sie die Länge eines solchen senkrechten Vektors, der von einem Punkt C auf g_1 zu einem Punkt D auf g_2 zeigt und damit den kürzesten Abstand der beiden Geraden zueinander.

4.) Wo liegen alle Punkte P, deren Abstand von der Geraden $4x_1 - 3x_2 + 12 = 0$ gleich 1 ist? Bestimmen Sie eine zeichnerische und eine rechnerische Lösung!

5.) Gegeben Sind die zwei Ebenen $E_1 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$ und $E_2 : \vec{a} + \mu\vec{b} + \lambda\vec{c}\ , \mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie die Gerade g_1 als Schnittmenge der Ebenen. Bestimmen Sie den Abstand von Punkt A zu g_1. $\vec{a}$ ist Ortsvektor zu A.Weiter sei $E_3 : \vec{a} + \mu\vec{d} + \lambda\vec{c}$ mir $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie den Abstand von E_3 zu E_1.

Hausaufgaben (Abgabe bis 27.11.2018)

6.) Gegeben seien die folgenden Ebenen im $\mathbb{R}^3$

$$E_1 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$
$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $(1/1/1)$ zu den Ebenen E_1 und E_2

(b) Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen E_1 und E_2

(Jeweils 3 Punkte)

7.) **Typische IHK-Aufgabe.** In einem Berghang steht ein 20 Meter hoher Turm mit einem Funksender auf der Spitze, dessen Reichweite in alle Richtungen 100 Meter beträgt. Der Berghang hat eine gleichmäßige Steigung von 100 % (entspricht $45°$ zur horizontalen Fläche) und ist ein Südhang, d.h. die Talsohle liegt im Süden, der Gipfel im Norden.

(a) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung zwischen Sender und Berghang.

(b) Berechnen Sie für jede der vier Himmelsrichtungen den Punkt, an dem man den Sender gerade noch empfangen kann.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!

(Jeweils 3 Punkte)

8.) **Typische IHK-Aufgabe.** In der Fußballarena des FC MATSE wird der Tunnel in die Katakomben während des Spieles von einer schweren Metallplatte verschlossen. Die Metallplatte hat zwei Scharniere an den Punkten $S = (0, 0, 0)$ und $T = (0, 4, 0)$. Um den Zugang zu öffnen ist eine Aufhängung an der Metallplatte an Stahlseilen befestigt. Im geschlossenen Zustand befindet sich diese Aufhängung in Punkt $A = (-3, 2, 0)$, im geöffneten Zustand im Punkt $B = (-3/\sqrt{2}, 2, 3/\sqrt{2})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Metallplatte beim Öffnen um $45°$ gedreht wird.
(Hinweis: $\cos(45°) = 1/\sqrt{2}$)

Der Architekt schlägt vor, die Metallplatte an der Aufhängung mittels zweier Stahlseile zu befestigen, deren anderes Ende am Stadion an den Punkten $F = (3, -1, 6)$ bzw. $G = (3, 8, 3)$ befestigt werden soll.

(b) Welche Länge muss das an F befestigte Stahlseil (im geschlossenen Zustand) dann (mindestens) haben?

Sie bevorzugen eine Lösung mit nur einem Stahlseil, dessen anderes Ende am Stadion an einer Stelle H auf der geraden Verbindung zwischen F und G befestigt wird.

(c) Bestimmen Sie die Stelle für H, wenn das Stahlseil möglichst kurz sein soll.

(jeweils 3 Punkte)