Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 7 14.11.2018

Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie zu den folgenden Ebenengleichungen im $\mathbb{R}^3$ die jeweils anderen Darstellungsformen (Punkt-Richtungsform, Normalform, Hessesche Normalform)

(a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $E_2 : 2x_1 + x_2 = 7$

(c) $E_3 : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1$

(d) Ebene E_4 durch die Punkte $P = (1; 2; 3)$, $Q = (1; 3; 2)$ und $R = (0; 2; 1)$

(e) $E_5 : \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 4$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x - y + t \cdot z = 9, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

3.) Untersuchen Sie jeweils, ob folgende Ebenengleichungen die selben Ebenen beschreiben:

(a) $E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2 : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$E_2 : x = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$

(c) $E_1 : x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5$ und $E_2 : -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = -10$

Falls zwei Ebenen nicht identisch sind, bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen.

4.) In welchem Punkt schneidet die Gerade durch die Punkte $P = (1; 1; 1)$ und $Q = (1; 2; 3)$ die (x_1, x_2)-Ebene? Berechnen Sie auch den Winkel.
Welche Ebene senkrecht zur Geraden verläuft durch den Nullpunkt?

5.) **Typische IHK-Aufgabe.** Der 10 km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4 km Seitenlänge, soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden.
Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zurücklegt. Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x- bzw. y-Koordinatenachsen verlaufen, nähert sich das Objekt entlang der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}.$$

Machen Sie zuerst eine Skizze. Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (xz)-Ebene liegt (Hinweis: $y = 0$). Wo liegt der Austrittspunkt (Hinweis: $y = 4$)? Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?

Hausaufgaben (Abgabe bis 20.11.2018)

6.) Berechnen Sie paarweise die Schnittpunkte der folgenden Geraden, falls diese existieren

$$\begin{aligned} G_1 &: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ G_2 &: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} = 1 \\ G_3 &: < \vec{n}, \vec{x} >= 4 \qquad \text{mit} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3 Punkte)

7.) (a) Stellen Sie die Hyperebene $< n, x >= -1$ im Raum $\mathbb{R}^4$ mit

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in Parameterform dar.

(b) Stellen Sie die Hyperebene im Raum $\mathbb{R}^4$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in Normalform dar.

(Jeweils 3 Punkte)

8.) Gegeben sei eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$

$$E = 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

Bestimmen sie:

(a) eine Ebene E_a, die senkrecht zu E verl?uft. Die Schnittmenge von E und E_a beinhaltet den Punkt $(1, -1, 4)$

(b) einen Normalenvektor einer Ebene E_c, sodass E_c und E sich im Winkel von $\frac{\pi}{3}$ schneiden.

Geben sie ihren Rechenweg an oder validieren sie ihr Ergebnis:

(jeweils 3 Punkte)