Benno Willemsen, Louai Ben Yahia, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 5 — 31.10.2018

Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Raumdiagonalen eines Würfels und den Kanten.

2.) (a) Wie kann man $\sum_{k=1}^{n} a_k$ als Skalarprodukt des Vektors $a \in \mathbb{R}^n$ mit einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ darstellen? Wie muss dieser Vektor b aussehen?

(b) Beweisen Sie, dass gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Hinweis: Benutzen Sie Teil a) und die Schwarzsche Ungleichung.

3.) Die Vektoren $v_n \in \mathbb{R}^3$ sind definiert durch

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_n = v_{n-1} \times a, \text{ wobei } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$v_{2n} = (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Hausaufgaben (Abgabe bis 06.11.2018)

4.) Berechnen Sie $a \times b$ für die Vektoren

(a) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie außerdem für die Teile a) und b):

$$b \times a,\ -b \times a,\ a \times a,\ \langle a \times b, b\rangle,\ \langle a \times b, a\rangle,\ \langle a \times b, b \times a\rangle \text{ und } (a \times b) \times b$$

(jeweils 3 Punkte)

5.) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Man beweise die Graßmannsche Identität

$$a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c.$$

(3 Punkte)

6.) Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die folgenden Vektoren definiert:

$$p_0 = b,\ z_n = a \times (a \times p_n),$$

Weiter sind die Vektoren p_{n+1} rekursiv definiert durch

$$p_{n+1} = \frac{\langle z_n, b\rangle}{\langle b, b\rangle} b,\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$ (p_{n+1} ist die Projektion des Vektors z_n auf b).

(a) Berechnen Sie die Vektoren p_1 und p_2.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass folgende explizite Formel gilt:

$$p_n = (-2)^n b,\ n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

(jeweils 3 Punkte)