Benno Willemsen, Svenja Schmidt, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen University

Übungsblatt 3 17.10.2018

Hinweis: Zwei Vektoren a, b werden senkrecht genannt, falls gilt : $< a, b >= 0$

Präsenzaufgaben

1.) Prüfen Sie nach, ob die folgenden Punkte Eckpunkte eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck sein können, d.h. ob 2 der Verbindungslinien gleich lang sind und einen rechten Winkel bilden.

$$P_1 = (1, 1 + \sqrt{3}), \quad P_2 = (2 + \sqrt{3}, 2), \quad P_3 = (3, 1 - \sqrt{3})$$

2.) Welche der folgenden Gleichungen bzw. Aussagen sind für beliebige Vektoren und beliebige Skalarprodukte richtig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $\vec{a} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \vec{a}^2 \cdot \vec{c}$

(b) $\vec{b} = \sqrt{\vec{b}^2}$

(c) $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

(d) $\dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b} = \vec{a}$

(e) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$

(f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \cdot \vec{x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \dfrac{3}{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

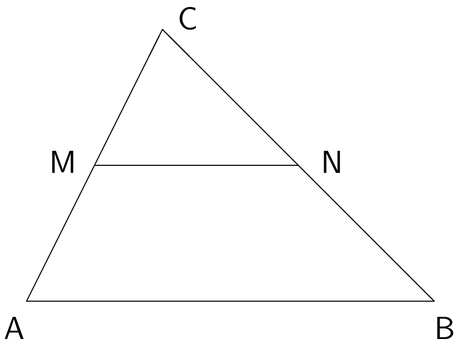
3.) Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

(a) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

(b) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$

(c) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

4.) In einem Dreieck ABC sind M und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ (siehe Zeichnung). Zeigen Sie: Die Strecke $\overline{MN}$ ist parallel zur Dreiecksseite $\overline{AB}$ und halb so lang wie diese.



5.) Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) Weiter sei $\lambda = 6$, $\mu = \frac{32}{5}$. Stellen Sie nun $\vec{c}$ als Summe von Vielfachen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

(b) Ist eine solche Darstellung auch für $\lambda = 12$, $\mu = \frac{2}{5}$ möglich?

(c) für welche Werte von λ und μ stehen $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht aufeinander?

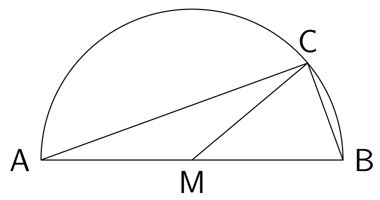
Hausaufgaben (Abgabe bis 23.10.2018)

5.) Welcher Punkt hat von den Punkten $A = (0, 1)$, $B = (0, 7)$ und $C = (4, 9)$ den gleichen Abstand? Tipp: P sei der gesuchte Punkt. Es muss für die zugehörigen Ortsvektoren gelten:

$$\|\vec{p} - \vec{a}\| = \|\vec{p} - \vec{b}\| = \|\vec{p} - \vec{c}\|$$

(3 Punkte)

6.) Beweisen Sie, dass jedes Dreieck A,B,C, das wie in der Skizze dargestellt konstruiert wurde, rechtwinklig ist.(Satz des Thales)
Dabei liegt der Punkt C auf dem Halbkreis über A und B.



Hinweis: Sie erkennen am Skalarprodukt zweier Vektoren ob die Vektoren senkrecht zueinander stehen. Für einen Vektor $\vec{a}$ gilt fü das euklidische Skalarprodukt und die euklidische Norm $< \vec{a}, \vec{a} >= ||\vec{a}||^2$

(3 Punkte)

7.) Schreiben Sie eine Klasse `VectorRn`, die die Vektoren des $\mathbb{R}^n$ symbolisiert, mit folgenden Methoden:

```
public VectorRn add (VectorRn v2)

public VectorRn mult (double d).
```

`add` soll dabei die Addition des `this`-Objektes mit dem Vektor `v2` und `mult` die Multiplikation des `this`-Vektors mit dem Skalar `d` durchführen und zurückgeben. Das `this`-Objekt soll dabei jeweils unverändert bleiben.
Dabei soll die gewohnte komponentenweise Addition und Multiplikation verwendet werden.
Werfen Sie im Falle nicht konsistenter Dimensionen bei der Addition eine `RuntimeException`.
Halten Sie sich an die Namenskonventionen.

Betrachten Sie die folgenden Testfälle:
$\vec{a} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\vec{b} = (5, 6, 7, 8)^T$, $\vec{c} = (1, 2)^T$, $d = 3$

Eingabe	Ausgabe
$\vec{a} + \vec{b}$	$(6, 8, 10, 12)^T$
$\vec{a} + \vec{c}$	Exception
$\vec{a} * d$	$(3, 6, 9, 12)^T$

(3 Punkte)