②

a) $f(\vec{x}) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$

$\Rightarrow$ keine quadratische Form wegen $4x_1x_2x_3$

b) $f(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2 + 4$

$\Rightarrow$ keine quadratische Form wegen $(x_1 - 5x_2 + 4)$

c) $f(\vec{x}) = x_1x_2 + x_3x_4 - 20x_5$

$\Rightarrow$ keine quadratische Form wegen $-20x_5$

d) $f(\vec{x}) = x_1^2 - x_3^2 + x_1x_4$

$\Rightarrow$ quadratische Form

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\det(A_1) = 1 \quad > 0$

$\det(A_2) = 0 - 0 = 0 \quad \geq 0$

$\det(A_3) = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0 \quad \geq 0$

$\det(A) = -1(0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0) = 0 \quad \geq 0$

$\Rightarrow$ A ist semi-positiv definit

Definitheit Beispiele

Montag, 2. Juli 2018 12:51

A_1: $|4| = 4$ $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ semipositiv Definit

A_2: $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $|4| = 4$

positiv Definit

A_3: $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$ $|4| = 4$

$\rightarrow$ indefinit

A_4: $|-1| < 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} < 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\rightarrow$ indefinit

③

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a \in (-2, 2) \\ b \in (-1, 0, 1) \end{matrix}$$

a)

$$\det(A_1) = a > 0$$
$$\Rightarrow a = 2$$
$$\det(A) = ab - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow ab > 1$$
$$\Leftrightarrow b > \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow b = 1$$

b)

$$\det(A_1) = a < 0$$
$$\Rightarrow a = -2$$
$$\det(A) = ab - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow ab > 1$$
$$\Leftrightarrow b < -\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow b = -1$$

c)

$$\det(A) = ab - 1 < 0$$
$$\Leftrightarrow ab < 1$$
$$\Rightarrow b = 0 \lor (b = 1 \land a = -2) \lor (b = -1 \land a = 2)$$

5

2.2: A p.d. $\Rightarrow a_{ii} > 0 \quad i = 1, \dots, n$

A p.d. $\Rightarrow \vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0$

Da es für alle $\vec{x}$ gilt, muss es auch für alle Einheitsvektoren gelten. Das i-te Diagonalelement der Matrix A erhält man, indem man $\vec{x} = \vec{e_i}$ setzt, wobei $\vec{e_i}$ der i-te Einheitsvektor ist.

$\vec{e_i}^T A \vec{e_i} = a_{ii} > 0$

$a_{ii} > 0$ muss gelten, da A positiv definit

somit sind alle Diagonalelemente $a_{ii} > 0$

A SPD $\Rightarrow$ $A = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$

da alle Eigenwerte von A echt positiv, kann $\bar{D}$ wie folgt gebildet werden

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \qquad \bar{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$$

$$B = Q \bar{D} Q^{-1}$$

$$B^2 = Q \bar{D} Q^{-1} Q \bar{D} Q^{-1} = Q \bar{D}^2 Q^{-1} = Q D Q^{-1} = A$$

$\square$