Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 13 25.6.2018

Präsenzaufgaben

1.) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Können Sie für diese Matrizen eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix B finden, so dass gilt: $B^{-1}AB = D$?

2.) Berechnen Sie A^8 für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

3.) (a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Gibt es einen Fixpunkt (d.h. existiert ein Vektor $\vec{x}$ mit $A\vec{x} = \vec{x}$)?

(c) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine Orthogonalmatrix U, so dass gilt: $U^TAU = D$.

4.) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) jede Matrix der Form BDB^T, D ist Diagonalmatrix, ist symmetrisch.

(b) Für Orthogonalmatrizen U, B, eine Diagonalmatrix S und $A = USB$ gilt:

U beinhaltet die Eigenvektoren von AA^T und S die Wurzeln der Eigenwerte von AA^T.

5.) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, die nur positive Eigenwerte besitzt und durch die orthonormale Matrix Q auf Diagonalgestalt D transformiert werden kann: $D = Q^{-1}AQ$.

(a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist. (Hinweis: Das Produkt invertierbarer Matrizen ist ebenfalls invertierbar.)

(b) Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A auf der Diagonale von D stehen.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $x^TAx > 0$.

Hausaufgaben (Abgabe bis 1.7.2018)

6.)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & b \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(a) weisen Sie nach, dass

$$-\lambda^3 + \lambda^2(2-a) + \lambda(-1+2a+b) - a + ab$$

das charakeristische Polynom der Matrix A ist und $\lambda_1 = -a$ ein Eigenwert der Matrix ist.

(b) Bestimmen Sie die übrigen Eigenwerte sowie die algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte in Abhängigkeit von a und b.

(c) Geben Sie für den Fall $b = 0$ die Eigenvektoren und deren geometrische Vielfachheit an.

7.) Eine Matrix A sei sowohl diagonalisierbar als auch invertierbar. Zeigen Sie, dass dann auch A^{-1} diagonalisierbar ist.

8.) (a) Beweisen Sie: $(A-B)^T = A^T - B^T$ für beliebige $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Matrix der Form $A_{u,v} = uu^T - vv^T$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ in der Form BDB^T dargestellt werden kann, wobei D Diagonalmatrix ist.

(c) Diagonalisieren Sie $A_{u,v}$ mit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.