Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 12 — 18.6.2018

Präsenzaufgaben

1.) (a) Welche speziellen Eigenschaften besitzt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}?$$

Hinweis: Es sind zwei Eigenschaften gesucht.

(b) Bestimmen Sie anschließend die inverse Matrix A^{-1}. Dies ist mit den speziellen Eigenschaften von A einfach. Was kann man außerdem über den Wert von $\det(A)$ sagen?

2.) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie auch eventuelle komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Ein komplexes Gleichungssystem können Sie wie ein reelles Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen.

3.) Die Abbildung f_A dreht einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ innerhalb der x-z-Ebene um einen Winkel ϕ. Die Abbildung f_B spiegelt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ an der x-Achse.

(a) Stellen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen A und B auf.

(b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der hintereinander geschalteten Abbildungen $f_B \circ f_A$ auf.

(c) Bestimmen Sie auch die zugehörige Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung $(f_B \circ f_A)^{-1}$.

4.) Gegeben sei folgende Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

einer linearen Abbildung bzgl. der Einheitsmatrix $\mathcal{E}$ im Definitions- und Wertebereich.

(a) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ an, in welcher die von A induzierte lineare Abbildung durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden kann.

(b) Geben Sie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ an.

(c) Geben Sie die Koordinaten der Eigenvektoren bzgl. Basis $\mathcal{E}$ und $\mathcal{B}$ an.

5.) (a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.
Hinweis: Berechnen Sie nicht die Komponenten von H_n.

(b) Verifizieren Sie das Ergebnis für $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Hausaufgaben (Abgabe bis 24.6.2018)

6.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix},\ B = a \cdot \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ c & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie an, für welche Werte von a und c die gegebenen Matrizen orthogonal sind.

(b) Geben sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu A in Abhängigkeit der Parameter an.

7.) Geben Sie jeweils Matrizen mit den folgenden Eigenschaften an.

(a) Die Matrix hat das charakteristische Polynom $-\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda$

(b) Die Matrix hat die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit den zugehörigen Eigenwerten -1 und 3.

8.) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & & & . & & . \\ . & & & & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$