Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2018

Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 9 — 28.5.2018

Präsenzaufgaben

1.) Untersuchen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für gegebene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des $\mathbb{R}^3$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A auf.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{z}$ mit $A\vec{z} = \vec{0}$.

(c) Bestimmen Sie den Wert für c, für den das LGS $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ c \\ -2 \end{pmatrix}$$

lösbar ist.

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für diesen konkreten Fall.

2.) Bestimmen Sie die Lösbarkeit der folgenden beiden Gleichungssysteme in Abhängigkeit von λ:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ \lambda & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wie hängt in beiden Fällen die Lösbarkeit des Gleichungssystems vom Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ \lambda & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

ab?

3.) Zu bestimmen ist der Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha & \alpha + 1 \\ 1 - \alpha & -1 & -2 \\ 1 - \alpha & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie den Rang mit Hilfe dese Gauß-Verfahrens.

(b) Bestimmen Sie den Rang mit Hilfe von Determinanten.

(c) Vergleichen Sie den Aufwand der beiden Verfahren für dieses Beispiel.

4.) **Typische IHK-Aufgabe.** Die drei Freunde Tim, Tom und Jerry haben in einem ausländischen Spirituosen- und Tabakgeschäft eingekauft. Beim Zoll stellen sie fest, dass sie keine Kassenzettel erhalten haben; allerdings wissen sie noch die Endsummen:
Jerry kaufte 1 Flasche Whiskey, 3 Flaschen Wein und 30 Päckchen Zigaretten und bezahlte 90 Dollar. Tom kaufte keinen Whiskey, 2 Flaschen Wein und 20 Päckchen Zigaretten und bezahlte 50 Dollar und Tim kaufte jeweils 1 Flasche Whiskey und Wein sowie 10 Päckchen Zigaretten und bezahlte 40 Dollar. Wieviel Dollar kosten die Artikel einzeln jeweils höchstens?

5.) Für welche Werte von a, b, c ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} ax & + & 2y & + & z & = & 1 \\ bx & + & y & + & z & = & 0 \\ cx & + & 3y & - & z & = & 0 \end{pmatrix}$$

lösbar? Berechnen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von a, b und c. Verwenden Sie dazu die Cramersche Regel.

Hausaufgaben (Abgabe bis 03.06.2018)

6.) Gegeben sei die folgende Matrix $A_n \in \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten

$$a_{ij} = (i + j - 1)_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,n}$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A_4.

(b) Bestimmen sie allgemein den Rang von A_n und geben Sie jeweils eine Basis des Raums an, der von den Spaltenvektoren und den Zeilenvektoren aufgespannt wird.

7.) Gegeben seien die folgenden Vektoren.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

(a) Berechnen Sie $det(a_1, a_2, a_3, b)$ in Abhängigkeit von a.

(b) Interpretieren Sie das Ergebnis aus a) hinsichtlich Lösbarkeit der LGS

$$(1)\ (a_1, a_2, a_3)x = b \text{ und } (2)\ (a_1, a_2, a_3, b)x = 0$$

.

8.) Die Matrix A habe folgende Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage.

Für alle $b \in \mathbb{Z}^n$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ganzzahlige Lösungen.

Hinweis: Verwenden Sie die Cramersche Regel. Was wissen sie über $det(A)$, falls $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$?