Benno Willemsen, Jürgen Dietel, Lars Klöser — FH Aachen, Campus Jülich; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 4 — 23.04.2018

Präsenzaufgaben

1.) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Matrixprodukte sind wohldefiniert:

(a) $A \cdot B$ (b) $B \cdot A$ (c) $B \cdot C$ (d) $C \cdot B$
(e) $B \cdot C^T$ (f) $A \cdot C$ (g) $A \cdot C^T$ (h) $C^T \cdot A$
(i) $C \cdot B \cdot C^T$ (j) $A \cdot C \cdot B$ (k) $C^T \cdot A \cdot C$ (l) $B \cdot C \cdot A$
(m) $B \cdot C^T \cdot A$ (n) $C \cdot B \cdot A$

Begründen Sie Ihre Aussage und bestimmen Sie ggf. das Produkt der Matrizen.

2.) A sei eine 3×3-Matrix.

(a) Welche Beziehung $(=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq)$ besteht zwischen dem Kern von A und dem Kern von A^2 (und von A^3)?

(b) Was gilt für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

3.) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch, wenn für alle Komponenten $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, ..., n$. Daraus folgt, dass für symmetrische Matrizen gilt $M = M^T$.

(a) Warum ist $x(y^T Ax)$ mit $(y^T Ax)x$ identisch, warum gilt hier also ausnahmsweise die Kommutativität für die Matrixmultiplikation $\left(x, y \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}\right)$

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(A + A^T)$ symmetrisch ist.

(c) Warum gilt $x^T Ax = x^T A^T x$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n$?

4.) Sei $S = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.
Stellen Sie eine Vermutung für S^n auf und beweise diese mit vollständiger Induktion.

5.) Berechnen Sie jeweils die Inverse folgender Matrizen, falls diese existiert:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Hausaufgaben (Abgabe bis 29.04.2018)

6.) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7.) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so beschaffen, dass diese Darstellung

$$A = B^T B$$

möglich ist mit $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass $x^T Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ nie negativ werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass $x^T Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sogar immer positiv ist, falls $det(B) \neq 0$.

(d) Zu jedem Ausdruck der Form $x^T Ax$ ex. eine symmetrische Matrix $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$.
Zeigen Sie, dass gilt $x^T Ax = x^T Bx$.
Hinweis: Es gilt $x^T Ax = x^T A^T x$

8.) Es sei A eine 2×2-Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie dazu zwei Rechenwege:

(a) Überprüfen Sie, dass das Produkt von A und A^{-1} die Einheitsmatrix gibt.

(b) Berechnen Sie die Inverse von A nach dem Gauß-Verfahren.